

Universidade Federal do Paraná

Marcelo Silva Custódio

Efeito de Bordas em Bilhares Abertos

**Curitiba**  
**2010**

Universidade Federal do Paraná

Marcelo Silva Custódio

## Efeito de Bordas em Bilhares Abertos

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Física

**Orientador:** Prof. Dr. Marcus Werner Beims

Curitiba  
2010

# Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a natureza pela sua fantástica beleza, cuja complexidade brinca com nossas mentes e nos deixa confusos por sermos completamente ignorantes.

Agradeço a todo o povo brasileiro que sustenta nosso país pagando impostos, que são usados, entre tantas outras coisas, para pagar minha bolsa de estudos.

Agradeço a minha mãe Juracy Silva Custódio e a meu pai Cilso Custódio pela educação que me deram. Ensinarão-me a respeitar, a ter ética, a ser honesto, e a lutar pelo país e a valorizar tudo o que temos aqui.

Agradeço aos meus professores, todos, desde o ensino fundamental até os da faculdade que complementaram minha educação.

Em especial agradeço ao professor Marcus Werner Beims que acreditou em mim e me orientou nos tempos de iniciação científica e durante o curso de mestrado.

Agradeço também a todas as pessoas que de alguma maneira me ensinaram alguma coisa, mesmo não sendo professores no papel.

Agradeço aos meus colegas, aos amigos. Não posso citar nomes, pois correria o risco de esquecer algum.

Em especial agradeço a minha grande amiga Natasha Ariane Diniz Yamamoto, que me ajuda desde a graduação e continua ajudando. Sem ela em minha vida tudo seria mais triste e sem sentido.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

# Resumo

O estudo da dinâmica de partícula em bilhares com diferentes geometrias é de extrema importância, pois a partir de uma simples modelagem é possível fazer uma boa aproximação para problemas reais bem mais complexos. Neste trabalho estudaremos como o efeito de borda em bilhares abertos, do ponto de vista clássico, pode causar um aumento significativo no tempo de escape de uma partícula que se move em seu interior com energia constante, e também uma grande mudança no comportamento do ângulo de emissão. Para isso usamos dois modelos: o bilhar retangular aberto com cantos arredondados e o bilhar retangular com arredondamentos na borda da abertura. Esses casos são interessantes pois variando o raio de arredondamento encontramos como limites o caso com dinâmica regular (quando o arredondamento é nulo) e comportamento caótico (quando o raio de arredondamento é grande). Utilizamos a distribuição da estatística do tempo de retorno, que relaciona a forma da curva de decaimento com cada tipo de dinâmica, para caracterizar nossos modelos a medida que o raio de arredondamento varia. Curvas com decaimento do tipo lei de potência indicam um dinâmica dividida e com regiões de aprisionamento de órbitas. O decaimento exponencial significa que a dinâmica é caótica. Como principal resultado mostramos de forma numérica que cantos com arredondamento entre 0.01% e 1% da altura do bilhar (primeiro caso) é suficiente para provocar um aumento significativo nos tempos de retorno e induzir um decaimento do tipo lei de potência para a distribuição estatística do tempo de retorno. Para o segundo caso, bordas com arredondamento entre 0.1% e 10% possuem o mesmo efeito mencionado anteriormente. Para valores maiores que os mencionados o decaimento encontrado é exponencial indicando que os sistemas tornam-se totalmente caóticos. Também verificamos que os pequenos arredondamentos dão origem a estruturas auto-similares, e a uma rica dinâmica tanto no tempo de escape quanto no ângulo de emissão.

# *Abstract*

The study of particle dynamics in billiards with different geometries is extremely important because from a simple model one can make a good approximation to real problems far more complex. In this work we studied how the edge effect in open billiards can cause a significant increase in the escape time of a particle moving inside with constant energy, and also a big change in the behavior of the emission angles. We used two models: the open rectangular billiard with rounded corners and rectangular billiards with rounding at the edge of the escape point. These cases are interesting because varying the radius of rounding we found as limits the case with regular dynamics (where rounding is zero) and chaotic behavior (when the radius of rounding is the greatest). We used the escape time statistics, which relates the shape of the decay curve with each type of dynamics, to characterize our models by the variation of the rounding radius. Decay curves with power law indicate a dynamic and divided regions and sticky motion. The exponential decay means that the dynamics is chaotic. We have shown numerically that the corners rounded off between 0.01% and 1% of the height of the billiard (first case) is sufficient to cause a significant increase in turnaround times and induce a power law decay for the escape times statistics. For the second case, the edges rounded off between 0.1% and 10% have the same effect mentioned earlier. For larger values than those found earlier, an exponential decay is found which indicates that the systems become totally chaotic. We also found that small rounding give rise to self-similar structures, and a rich dynamic in escape times and in emission angle.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Caos em sistemas dinâmicos</b>	<b>9</b>
2.1	Formalismo Lagrangeano . . . . .	9
2.2	Variáveis ação ângulo . . . . .	12
2.3	Movimento em Torus . . . . .	15
2.4	Seção de Poincaré . . . . .	18
2.5	Sistemas quase-integráveis . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Tempo de retorno</b>	<b>20</b>
3.1	Tempo de retorno de Poincaré . . . . .	20
3.2	Estatística do tempo retorno . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Bilhares</b>	<b>25</b>
4.1	Dinâmica de bilhares . . . . .	25
4.1.1	Órbitas periódicas marginalmente instáveis . . . . .	29
4.2	Bilhares abertos . . . . .	29
4.3	Tempo de retorno em bilhares . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>32</b>
5.1	Método de cálculo . . . . .	32
5.1.1	Primeiro exemplo: Bilhar retangular com abertura . . . . .	33
5.1.2	Segundo exemplo: Setor circular . . . . .	35
5.2	Primeiro modelo: Bilhar com cantos arredondados em forma de $1/4$ de círculo . . . . .	36
5.2.1	Análise do espaço de fase . . . . .	37
5.2.2	Bilhar retangular com pequenos cantos arredondados . . . . .	41
5.3	Segundo modelo: Bilhar retangular com arredondamento nas bordas da abertura . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>53</b>

# Lista de Figuras

2.1	Circuito de integração. . . . .	13
2.2	Representação do movimento de uma partícula no espaço de fase. . . .	16
2.3	Corte do Torus. O círculo e o triângulo pequenos são condições iniciais.	17
2.4	Representação da seção de Poincaré. Cada cruzamento da órbita na seção é um ponto marcado. . . . .	18
3.1	Representação de uma recorrência. . . . .	21
4.1	Colisão de uma partícula com uma parede rígida. . . . .	26
4.2	Bilhares regulares: a) bilhar retangular; b) bilhar circular. . . . .	27
4.3	Exemplo de bilhares caóticos: a) Bilhar do Estádio; b) Bilhar de Sinai.	27
4.4	Bilhares cogumelo [3]. . . . .	28
4.5	Trajetória regular em um bilhar cogumelo e à direita o espaço de fase mostrando claramente as regiões de caos e de regularidade. . . . .	28
4.6	MUPOS presentes no bilhar de Sinai e no bilhar do estádio [26]. . . . .	30
5.1	Exemplo da divisão do bilhar em setores. . . . .	33
5.2	Primeiro exemplo: bilhar retangular . . . . .	34
5.3	Possíveis pontos de cruzamento. No caso do bilhar retangular sempre são 4 (pontos numerados). . . . .	35
5.4	Possíveis pontos de cruzamento no setor circular. . . . .	35
5.5	Bilhar retangular com cantos arredondados. . . . .	37
5.6	Casos limites: retangular, circular, estádio. . . . .	37
5.7	Espaço de fase para o bilhar circular (a) e um <i>zoom</i> (b). Comportamento da velocidade no ( $V_x$ ) pelo ângulo de colisão ( $\theta$ ). . . . .	38
5.8	Espaço de fase para o bilhar retangular. . . . .	39
5.9	Espaço de fase para o bilhar do estádio. . . . .	39
5.10	Espaço de fase para o bilhar quase circular com $n = 0.001$ . . . . .	40
5.11	Fragmentos do espaço de fase da figura 5.10 e abaixo de cada um suas respectivas órbitas. A da esquerda tem ângulo inicial $\theta_0 = 0.525 \text{ rad}$ , a do meio $\theta_0 = 0.698 \text{ rad}$ e a da esquerda $\theta_0 = 0.790 \text{ rad}$ . . . . .	41
5.12	Gráfico de $Q(\tau)$ em função de $\tau$ . Cada curva foi feita para diferentes valores da razão $R/L$ , desde $R/L = 0$ (bilhar retangular) até $R/L = 0.5$ (bilhar do estádio). . . . .	42
5.13	Tempo de retorno em função do ângulo de entrada $\theta_0$ para (a) $R/L = 0$ , (b) $R/L = 10^{-3}$ e (c) uma ampliação de (b). . . . .	43
5.14	Modelo do bilhar com as trajetórias mais curtas. . . . .	44
5.15	Modelo do bilhar com dois tipos de arredondamento de borda. . . . .	45

5.16	Distribuição dos tempos de retorno para o bilhar da figura 5.15 (usando a equação (4.2)). Cada curva foi feita para diferentes valores da razão $R/L$ , desde $R/L = 1$ (caótico) até $R/L = 0.0$ (bilhar retangular). . . .	46
5.17	(a) Ângulo inicial pela razão $R/L$ pelo tempo de escape (barra colorida). (b) Ângulo inicial pela razão $R/L$ pelo ângulo final (barra colorida). . .	48
5.18	Ampliação das caixas mostradas nas figuras 5.17. . . . .	50
5.19	Ampliação das caixas mostradas nas figuras 5.18(a) e (b). . . . .	51



# Capítulo 1

## Introdução

O estudo da dinâmica de bilhares atualmente tem-se revelado de extrema importância, pois a partir da simples modelagem usando um bilhar é possível fazer uma boa aproximação para problemas reais bem mais complexos.

Os bilhares podem ser definidos, do ponto de vista clássico, como sendo estruturas com baixa dimensionalidade, na maioria dos casos bidimensionais, constituídas por paredes que confinam o movimento de uma partícula (ou várias) dentro da região delimitada por elas. Essas paredes normalmente são modeladas usando equações matemáticas ou formas geométricas que descrevem a parede escolhida. Existem infinitas possibilidades para a geometria a ser empregada, e cada geometria escolhida pode gerar uma dinâmica diferente.

Podemos dizer que o estudo da dinâmica gerada por uma partícula confinada em bilhares foi introduzida por dois trabalhos: o primeiro é sobre o bilhar de Sinai [1] e o segundo é sobre o bilhar de Bunimovich [2] (ou bilhar do estádio). Esses dois trabalhos ficaram conhecidos por demonstrar que um sistema tão simples, com apenas dois graus de liberdade, pode apresentar comportamento caótico. Nesses o comportamento caótico é consequência direta da interação entre a partícula e as paredes que compõe o bilhar.

É comum encontrarmos bilhares constituídos por paredes retas, ou paredes curvas onde o raio de curvatura é constante (um setor circular), ou a combinação dos dois tipos. Um bilhar com apenas paredes retas, bilhar retangular, induz um comportamento regular. O bilhar circular também apresenta uma dinâmica regular. Em geral as paredes curvas, em forma de setor circular, têm a propriedade de focar trajetórias quando a incidência se dá na parte côncava e de desfocar quando a incidência se dá na parte convexa. O comportamento caótico surge quando temos essas propriedades combinadas com as geradas pelas paredes retas, que são justamente os casos dos bilhares de Sinai e do estádio.

No entanto, é possível combinar paredes retas e curvas de forma a permitir que o movimento possa ser do tipo dividido, ou seja, que possa conter uma dinâmica regular ou uma dinâmica caótica (dependendo das condições iniciais). Esses bilhares

foram primeiramente sugeridos em [3] e são conhecidos como bilhares "cogumelos", constituídos por um semicírculo unido a um retângulo (ver capítulo 4). Essa configuração permite que algumas órbitas fiquem confinadas no semicírculo fazendo com que a dinâmica torne-se regular.

Todos os bilhares mencionados até agora eram fechados, no entanto ainda existe uma outra classe que são a de bilhares abertos. Eles normalmente possuem uma abertura que varia em tamanho e forma de acordo com o que se pretende estudar.

A razão para a introdução desse novo parâmetro é deixar a modelagem teórica mais próxima da realidade, pois experimentos reais geralmente medem um sinal (luz, átomos, partículas etc.) que saem do sistema de interesse. Se a abertura (ponto de fuga ou orifício) do dispositivo físico, de onde o sinal sai, tem tamanho e forma relevante, o sinal pode incluir informações de dentro do dispositivo físico e também do própria forma do orifício. A forma e o tamanho do sistema de abertura dependem de interesses experimentais, mas também da forma de construção do dispositivo.

Para a dinâmica em sistemas macroscópicos e nanoestruturas, por exemplo, a forma e o tamanho do orifício de abertura pode apresentar irregularidades ou defeitos, que podem induzir alterações indesejáveis no sinal de saída. Essas irregularidades intrínsecas podem afetar a dinâmica das partículas que colidem na região de abertura. Em outras palavras, uma abertura em experimentos reais é por si só uma estrutura que pode afetar o efeito que se pretende estudar.

Normalmente, do ponto de vista teórico é muito difícil descrever a dinâmica da colisão de partículas com as bordas do sistema de abertura. Portanto, nos últimos anos mais atenção tem sido dada a descrição das partículas confinadas dentro dos limites (ou bilhar) que apresentam algum tipo de bordas específicas, suavidade etc. Para citar alguns exemplos, temos a rugosidade da borda em pontos quânticos [4], condições de contorno incomuns no bilhar bidimensional [5, 6], os efeitos das paredes suaves [7] e colisões com bordas [8] onde há interação entre as partículas em um bilhar 1D, arredondamento das arestas [9] e correções de borda [10] em um ressonador, deformação das cavidades dielétricas [11], entre outros.

Em todos esses exemplos o estudo é voltado para o efeito produzido pelas irregularidades apresentadas, no entanto temos casos onde esses efeitos de bordas estão contidos no sistema a ser estudado, ou seja, seu efeito é indesejado: experimentos com dispositivos semicondutores [12, 13] e cavidades quânticas [14], são exemplos disto.

Diante disso podemos fazer algumas perguntas: como um sinal de saída é afetado por tais bordas arredondadas? É possível que minúsculas bordas arredondadas transformem uma dinâmica integrável em um caso caótico? Qual é a sua influência na dinâmica em nanodispositivos abertos, e sobre as flutuações na condução eletrônica em semicondutores [15, 12], de transporte de partículas em nanoestruturas, de átomos frios em bilhares ópticos abertos [16] etc. Alguns trabalhos recentes [17, 18, 19, 20]

foram feitos nesse sentido. Eles analisaram o efeito da largura das aberturas sobre as taxas de escape das partículas em bilhares abertos. Mas não encontramos trabalhos em que o próprio sistema de abertura fosse modelado.

O objetivo desta dissertação é modelar um possível sistema de abertura e verificar qual é a sua influência na dinâmica do bilhar aberto.

A forma que se demonstrou mais conveniente para a análise da dinâmica nos bilhares abertos, por nós estudados, foi o cálculo de tempo de retorno (ou tempo de recorrência). Esse tipo de análise foi proposta primeiramente por Henri Poincaré e é enunciada como sendo o tempo que um sistema demora para sair de uma determinada região do espaço de fase e retornar a ela, assim é chamado de tempo de recorrência de Poincaré. No entanto, neste trabalho utilizaremos apenas o tempo de retorno a uma posição inicial, que é somente uma quantidade do sistema. Então tempo de retorno para nós é o tempo que a partícula demora entre a partida que é dada no centro da abertura e a saída pela mesma.

A estatística do tempo de retorno normalmente é feita fazendo uma curva da densidade de probabilidade em função dos tempos. Cada comportamento do sistema vai gerar uma curva com um decaimento diferente. Em [21, 22, 23] é mencionado que a distribuição com decaimento exponencial é típico de sistemas caóticos, em [24] é feita uma dedução via distribuição binomial que mostra o decaimento exponencial para sistemas caóticos. Assim consideramos que o decaimento mais aceito para o comportamento caótico é exponencial.

Além do decaimento exponencial encontramos na literatura o decaimento via lei de potência [22]. No contexto de sistemas dinâmicos o decaimento via lei de potência está relacionado com a presença de regiões de aprisionamento no espaço de fase. Órbitas nesses sistemas tendem a ficar algum tempo aprisionadas em torno de órbitas quase regulares, o que não existe em sistemas completamente caóticos. Consequentemente os tempos de recorrência tendem a aumentar. Essas regiões de aprisionamento normalmente surgem nas bordas de ilhas de regularidade, logo sistemas com o espaço de fase dividido tendem a apresentar esse tipo de comportamento. Em [25] o tempo de recorrência é usado para caracterizar um bilhar do tipo cogumelo, e nele é encontrado um expoente de decaimento  $\gamma = 2$  para sistemas divididos. Esse expoente é o mais aceito para esse tipo de sistemas.

Nessa dissertação usaremos basicamente dois modelos de bilhares abertos. O primeiro é o bilhar retangular com os cantos arredondados. Isso é obtido usando um setor circular ( $1/4$  de círculo) para modelar o canto, ao invés das paredes retas. A introdução desse canto arredondado é simular o efeito presente em estruturas reais e verificar a partir de que tamanho seus efeitos tornam-se mais relevantes. Para isso serão feitas curvas para o tempo de retorno desde um canto reto, até um canto tão arredondado, a ponto do bilhar se tornar igual ao bilhar do estádio. O objetivo é verificar como o

aumento do tamanho da borda influencia na dinâmica geral do bilhar.

O segundo modelo é também o bilhar retangular com arredondamentos nas bordas da abertura de saída. Esse arredondamento é feito usando semicírculos, um para cada lado. Essa mudança também é introduzida para simular melhor um sistema real. Para esse caso analisamos a estatística dos tempos de retorno olhando para a forma de decaimento.

Agora mostraremos como a dissertação foi dividida e resumiremos os principais objetivos em cada capítulo.

No capítulo 2 faremos uma revisão sobre sistemas dinâmicos utilizando o formalismo hamiltoniano. Abordaremos os conceitos sobre sistemas conservativos, dissipativos, sistemas integráveis, não integráveis, surgimento de caos devido à quebra de integrabilidade introduzida por uma perturbação, sistemas com dinâmica aprisionada. Embora nosso trabalho não seja diretamente tratado com o formalismo hamiltoniano, o entendimento de todos esses conceitos mencionados é de extrema importância para a contextualização dos resultados sob a nomenclatura de sistemas dinâmicos.

No capítulo 3 será apresentada a idéia de tempo de retorno de Poincaré de uma maneira mais geral e depois mostraremos os resultados mais conhecidos sobre a forma de decaimento da curva de distribuição de tempo de retorno para sistemas caóticos (decaimento exponencial) e para sistemas com comportamento dividido (decaimento via lei de potência). Também mostraremos como tempo de recorrência é aplicado a bilhares.

No capítulo 4 trataremos de bilhares clássicos, daremos uma introdução sobre o assunto e também falaremos dos principais trabalhos existente e da grande aplicabilidade dos resultados obtidos com bilhares em sistemas reais. Mostraremos os principais tipos de bilhares estudados e como a forma de cada um está relacionada com a dinâmica gerada.

Nossos resultados serão apresentados no capítulo 5, primeiramente explicando a forma de modelagem empregada e a maneira pela qual se chegou a um algoritmo para a descrição do movimento da partícula dentro de cada bilhar. Mostraremos espaços de fase para vários bilhares já conhecidos, como o bilhar circular, retangular e bilhar do estádio pra melhor entender a dinâmica de cada um e assim poder relacionar cada um desses casos extremos com o nosso problema. Apresentaremos os dois bilhares por nós estudados. Para o primeiro mostraremos espaços de fase chamando a atenção para as estruturas geradas no limite de bilhar quase circular, mostraremos as curvas do tempo de retorno e como o comportamento dela mudam com o aumento do raio de arredondamento. Chamaremos a atenção para as estruturas de autossimilaridade presentes nesse bilhar. Para o segundo caso, também mostraremos as curvas para o tempo de retorno variando de acordo com o aumento do raio da borda, apresentaremos gráficos mostrando como o tempo de retorno muda de acordo com tamanho do raio da

borda e do ângulo inicial. Também mostraremos que os ângulos de escape possuem um comportamento muito complexo de acordo com aumento do raio na borda de abertura.

Por fim, no capítulo 6, faremos as conclusões sobre qual é o efeito encontrado das bordas em bilhares, tanto na abertura como no interior do bilhar.

# Capítulo 2

## Caos em sistemas dinâmicos

Neste capítulo faremos uma revisão teórica sobre sistemas dinâmicos, utilizando o formalismo hamiltoniano. Em especial analisaremos os sistemas dinâmicos conservativos. Em seguida, introduziremos os conceitos e definições de sistemas hamiltonianos integráveis descrevendo os toros estáveis e instáveis. Também falaremos sobre o conceito de caos clássico.

### 2.1 Formalismo Lagrangeano

Podemos escolher várias maneiras de obter equações de movimento para um determinado sistema físico. Uma das maneiras mais conhecidas é a decomposição de forças seguindo o método de Newton, formando uma equação diferencial. Esse método é extremamente dependente da geometria do sistema e se torna de difícil aplicação quando a geometria é complexa ou quando muitos graus de liberdade estão presentes. Outro método é o Lagrangeano que usa as energias, potencial e cinética, do sistema. Seu uso é de maior valia quando estamos lidando com sistemas mais complexos, ele é definido por:

$$L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = T(\dot{\mathbf{q}}, t) - U(\mathbf{q}, t), \quad (2.1)$$

onde  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\mathbf{q}$  são coordenadas generalizadas e  $t$  é o tempo.  $T(\dot{\mathbf{q}}, t)$  é a energia cinética e  $U(\mathbf{q}, t)$  é a energia potencial. Para essa função ter sentido físico ela deve obedecer o princípio de mínima ação [27]. Esse princípio diz que de todas as trajetórias possíveis para um sistema físico, a trajetória real é aquela em que a ação é minimizada. A integral de ação para uma função é dada por  $\int_{t_1}^{t_2} y(t)dt$  e o resultado dessa integral de ação é chamado funcional. Aplicando para o Lagrangeano temos:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)dt, \quad (2.2)$$

para obedecer o princípio,  $S$  deve ser mínimo e para isso,  $L$  deve obedecer a equação de Euler-Lagrange [27]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (2.3)$$

A partir dessa equação é possível determinar as equações de movimento para cada coordenada  $q_j$ . As coordenadas  $q_j$  são ditas generalizadas, pois devem ser independentes entre si, ou seja, não podemos escrever uma em função das outras. Usando o formalismo Lagrangeano teremos para cada coordenada generalizada do sistema uma equação diferencial de segunda ordem do tipo (2.3).

Para um sistema onde não existe troca de energia com o meio, o Lagrangeano deve ser independente do tempo, o que pode ser escrito como:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = 0, \quad (2.4)$$

que depois de certa manipulação e do uso da equação (2.3) resulta em:

$$\frac{d}{dt} \left[ L - \sum_i \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right] = 0, \quad (2.5)$$

assim o termo entre colchetes deve ser constante e fica definido como:

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \quad (2.6)$$

Para esse caso,  $H$  é uma constante de movimento, e representa a energia total do sistema. Até agora estávamos usando velocidade e posição como variáveis. Suponha que essas coordenadas estejam no sistema ortogonal e que o sistema sofra uma translação infinitesimal, podemos usar novamente o princípio variacional no Lagrangeano,  $\delta L = 0$ , e concluir que:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.7)$$

onde  $p_i$  é o *momentum* linear, que é constante se o Lagrangeano é conservado sob translação [27]. Usando as equações (2.3) e (2.7)

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (2.8)$$

Assim podemos reescrever a equação (2.6) como:

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L. \quad (2.9)$$

As equações foram desenvolvidas para o caso de coordenadas retangulares. Pode-

mos relacionar as coordenadas retangulares com as coordenadas generalizadas e nessa relação é possível que a variável tempo se torne explícita no Hamiltoniano e no Lagrangeano. Assim teremos

$$H(q_j, p_j, t) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L(\dot{q}_j, q_j, t). \quad (2.10)$$

Fazendo agora uma derivada total de  $H(q_j, p_j, t)$  temos:

$$dH = \sum_j \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (2.11)$$

Fazendo a derivada total da equação (2.10) e usando (2.7) e (2.8) temos

$$dH = \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (2.12)$$

Comparando as equações (2.11) e (2.12), é possível identificar termo a termo e obter as seguintes equações:

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (2.13)$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (2.14)$$

onde  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  são as coordenadas generalizadas do sistema. As equações (2.13) e (2.14) são conhecidas como equações de movimento de Hamilton [27], ou também como equações canônicas de movimento com  $p_j$  e  $q_j$  sendo variáveis conjugadas. Sempre é possível fazer uma transformação de variáveis, pois para cada sistema estudado existirão coordenadas que o descreverão de maneira mais simples. Por exemplo, podemos imaginar uma partícula se movendo linearmente, imediatamente o referencial a ser escolhido é o cartesiano pois as equações de movimento escritas com essas coordenadas descreverão esse movimento de maneira bastante simples. Agora imaginamos que a partícula tenha um movimento helicoidal, as coordenadas que descrevem esse movimento de maneira mais simples são as coordenadas cilíndricas. Além de que o número de coordenadas generalizadas pode mudar quando mudamos o sistema que coordenadas (pêndulo simples é um exemplo).

Então é possível que existam novas coordenadas generalizadas  $\bar{\mathbf{p}}$  e  $\bar{\mathbf{q}}$  que simplificarão as equações anteriores de maneira a torná-las triviais. A maneira de obter essas equações é relacionando dois funcionais, um para Lagrangeano em função das coordenadas antigas e outro em função das novas coordenadas. No entanto, para poder conectar os dois funcionais existem funções, chamadas de funções geratrizes, que acrescentam um valor constante para equilibrar o valor dos funcionais. Existem quatro tipos



de função geratriz [27];

$$F_1(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}, t), F_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}, t), F_3(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{q}}, t), F_4(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, t). \quad (2.15)$$

Normalmente, para o nosso caso, a  $F_2$  é utilizada, e com isso é possível obter as equações de transformação canônicas que vão conectar as coordenadas antigas com as novas:

$$p_j(q_j, \bar{p}_j, t) = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad (2.16)$$

$$\bar{q}_j(q_j, \bar{p}_j, t) = \frac{\partial F_2}{\partial \bar{p}_j}, \quad (2.17)$$

$$\bar{H}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) + \frac{dF_2}{dt}. \quad (2.18)$$

A escolha de uma função geratriz pode ser feita de forma arbitrária, desde que respeitando as equações de Hamilton.

## 2.2 Variáveis ação ângulo

Como dito anteriormente uma transformação é feita arbitrariamente, respeitando as equações de Hamilton. Uma transformação bastante conhecida e que ajuda a entender melhor sistemas mais complexos, é a transformação para coordenadas ação-ângulo [28], que dão origem a idéia de movimento em Torus. A ação, que será uma das novas coordenadas, é definida pela integral:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint pdq. \quad (2.19)$$

Para entender o motivo dessa definição é preciso considerar primeiro o caso de um oscilador unidimensional com a hamiltoniana independente do tempo. A hamiltoniana escrita para esse caso é

$$H(q, p) = \dot{q}p - L, \quad (2.20)$$

onde aplicando a idéia de funcional, temos:

$$\int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H) dt = const.. \quad (2.21)$$

Nesse caso o intervalo de tempo é um período, então a equação (2.21) pode ser reescrita como

$$\oint (pdq - Hdt) = const., \quad (2.22)$$

como o valor de  $H$  é invariante no tempo o termo se anula na equação acima e sobra

apenas

$$\oint pdq = \text{const.} \quad (2.23)$$

O circuito de integração no espaço de fase, para um período, é mostrado na figura 2.1. Tomando apenas a integral que não se anula, ficamos com:

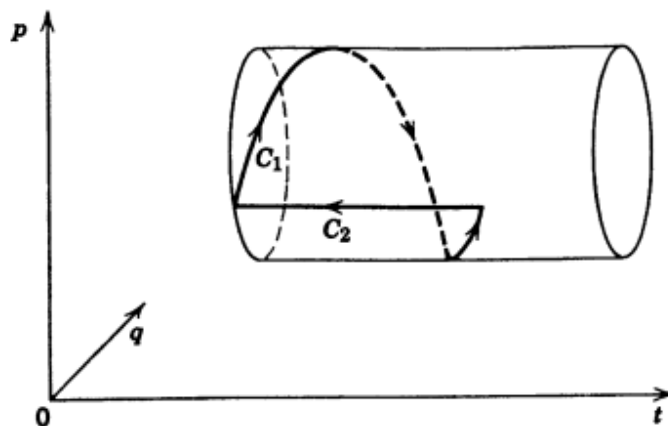


Figura 2.1: Circuito de integração.

$$\int_{c_1} pdq = \text{const.} = 2\pi J. \quad (2.24)$$

Essa nova coordenada, mesmo sendo motivada usando um sistema unidimensional e independente do tempo, pode ser usada para entender melhor sistemas com dependência temporal e com mais graus de liberdade.

Agora vamos aplicar essa nova coordenada a fim de se obter uma nova representação para sistemas hamiltonianos. Mas para isso ainda temos que fazer algumas considerações.

Vamos considerar um sistema hamiltoniano independente do tempo com  $N$  graus de liberdade e com  $N$  constantes de movimento, assim o hamiltoniano pode ser desacoplado e integrado. Reescrevendo a nossa função geratriz  $F_2(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{p}}) \equiv S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ , temos que geratriz será escrita da seguinte maneira:

$$S = \sum_j S_i(q_i, \alpha_1 \dots \alpha_n), \quad (2.25)$$

sendo  $\alpha$  o novo momento associado a cada constante de movimento, e a hamiltoniana para esse sistema [28]:

$$H = \sum_j H_j\left(\frac{\partial S_j}{\partial q_j}, q_j\right), \quad (2.26)$$

e cada equação fica:

$$H_j\left(\frac{\partial S_j}{\partial q_j}, q_j\right) = \alpha_j, \quad (2.27)$$

$\alpha_j$  é o novo momento o também é a constante de separação para cada equação de Hamilton-Jacobi [28] escrita para cada grau de liberdade. Para conseguir desacoplar esse sistema deve ser satisfeito que:

$$\sum_j \alpha_j = H_0, \quad (2.28)$$

Assim o novo hamiltoniano  $\bar{H}$  é somente função da constante  $\alpha_j$  e as equações de movimento podem ser resolvidas de forma trivial. Então também temos que:

$$J_j = J_j(\boldsymbol{\alpha}), \quad \alpha_j = \alpha_j(\mathbf{J}), \quad (2.29)$$

Nesse caso  $J$  é o momento novo escrito como função do momento velho que é  $\alpha$ . E reescrevendo a equação (2.25)

$$\bar{S} = (\mathbf{q}, \mathbf{J}) = S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{J})), \quad (2.30)$$

e o novo hamiltoniano:

$$\bar{H} = \sum_j \alpha_j(\mathbf{J}). \quad (2.31)$$

Com isso temos um hamiltoniano que vai fornecer as equações para o momento e posição de maneira trivial. Para sistemas periódicos as coordenadas  $p_j$  e  $q_j$  podem ser periódicas com o mesmo período, ou  $p_j$  pode ser uma função periódica de  $q_j$ . Para o primeiro caso o movimento é conhecido como libração e para o segundo o nome dado é rotação. Libração é o nome dado ao movimento quando o sistema oscila em torno de um ponto, por exemplo: no pêndulo simples sob a ação do campo gravitacional, ocorre libração em torno da região de potencial mínimo quando a sua energia não é suficiente para que o pêndulo gire em torno do seu centro de referência. Usando o mesmo exemplo, a rotação ocorre quando o pêndulo possui energia suficiente para girar em torno de seu centro de referência. Ainda podemos ter o caso onde a razão entre os períodos de  $p_j$  e  $q_j$  não é racional, esse movimento é chamado de condicionalmente periódico. Um exemplo é a órbita da Terra em torno do Sol que nunca se fecha em um mesmo ponto do espaço.

As coordenadas ação ângulo são muito boas para descrever os tipos de movimentos descritos anteriormente. Agora usando a equação (2.31) que é o novo hamiltoniano,

que só é função de  $\mathbf{J}$  e as equações canônicas de Hamilton (equações (2.7) e (2.8)) sendo  $\mathbf{J}$  o novo momento e  $\boldsymbol{\theta}$  a nova coordenada posição temos que:

$$(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}) \equiv (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}) \quad (2.32)$$

$$\frac{dJ_j}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}_j}{\partial \theta_j} = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \frac{\partial \bar{H}_j}{\partial J_j} = \omega_j \quad (2.34)$$

e resolvendo essas equações para o tempo conseguimos

$$J_j(t) = J_j(0) \quad (2.35)$$

$$\theta_j(t) = \omega_j t + c_j \quad (2.36)$$

Ainda podemos tirar mais informações relacionando  $\theta$  com  $J$ . Para isso, podemos usar as equações (2.19) e (2.16) para obter:

$$J_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j dq_j = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \bar{S}_j(q_j, \mathbf{J})}{\partial q_j} dq_j \quad (2.37)$$

que usaremos a seguir. Considerando a equação (2.17) temos que  $\theta_j = \theta_j(q_j, J_j)$  por isso escreveremos:

$$d\theta_j = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial [\bar{S}]}{\partial J_j} dq_j, \quad (2.38)$$

para isso foi usada a equação (2.17) e diferenciado  $\theta$  em relação a  $q_j$ , rearranjando a equação anterior e comparando com (2.37):

$$d\theta_j = \frac{\partial}{\partial J_j} \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_j} dq_j \longrightarrow \theta_j(t+T) - \theta_j(t) = \frac{\partial}{\partial J_j} \oint \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_j} dq_j = 2\pi. \quad (2.39)$$

onde  $T$  é o período pois é uma integral fechada e  $\theta_j$  é uma função periódica. Agora usando o resultado da equação (2.39) e fazendo  $\theta_j(t+T) - \theta_j(t)$  na equação (2.36) obtemos o seguinte:

$$\omega_j T = 2\pi, \quad (2.40)$$

assim conseguimos calcular o período.

## 2.3 Movimento em Torus

Como vimos anteriormente as coordenadas ação ângulo são maneiras de deixar o sistema que estamos analisando com uma representação mais simples. Elas são de grande importância para a análise de sistemas oscilatórios, periódicos ou quase-

periódicos, e mesmo para sistemas perturbados. Para prosseguir é importante saber como podemos representar as equações (2.36) e (2.35) de maneira gráfica. No entanto a representação que faremos é somente para um sistema com dois graus de liberdade, mas os conceitos podem ser usados para analisar sistemas com mais dimensões. Para isso tomamos um hamiltoniano escrito em função das coordenadas ação

$$H(J_1, J_2) = E, \quad (2.41)$$

onde  $E$  é a constante de energia e  $J_1, J_2$  são as constantes de movimento. As equações para as variáveis ângulo ficam assim:

$$\theta_1(t) = \omega_1 t + \theta_{10}, \quad \theta_2(t) = \omega_2 t + \theta_{20}. \quad (2.42)$$

Como temos duas constantes de movimento podemos representar o movimento no espaço de fase como estando contido em um torus onde o raio externo é  $J_2$  e o raio interno é  $J_1$ .

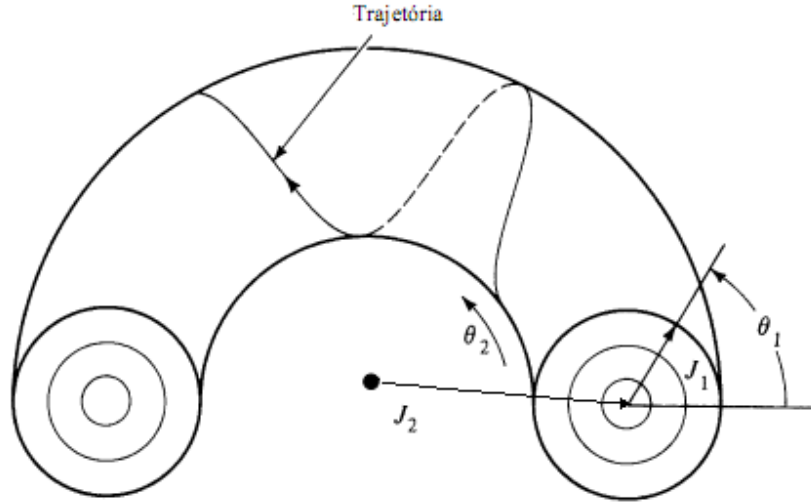


Figura 2.2: Representação do movimento de uma partícula no espaço de fase.

Esses valores das constantes de movimento vão definir o tamanho do torus e consequentemente a energia do sistema. Como a energia é constante, o movimento se dá limitado pela superfície do torus e a partícula descreve uma espécie de hélice ao redor do torus, como pode ser visto na figura 2.2.  $\theta_2$  é o valor do ângulo externo a cada instante do tempo, a ele está associada uma frequência  $\omega_2$ . Para o ângulo interno temos  $\theta_1$  e sua frequência  $\omega_1$ . Podemos classificar os sistemas olhando para relação entre as frequências. Para o sistema escolhido temos:

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (2.43)$$

Se  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são múltiplos,  $\alpha$  pode ser escrito como  $\alpha = n_1/n_2$  onde  $n_1$  e  $n_2$  são inteiros e  $\alpha$  é um número racional, assim o movimento é chamado de periódico e a órbita se fecha quando a partícula faz  $n_1$  voltas externas e  $n_2$  voltas internas. O torus nesse caso é chamado de racional ou torus ressonante. Podemos escrever uma equação mais geral para  $n$  graus de liberdade;

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (2.44)$$

onde  $\mathbf{n}$  é um vetor com valores inteiros. Se a equação (2.44) for válida o movimento se dá como descrito anteriormente.

Também é possível que  $\alpha$  seja um número irracional. Nesse caso a trajetória não se fecha sobre ela mesma em um número finito de voltas então toda a superfície do torus pode ser visitada por essa partícula. O torus para esse caso é chamado de irracional e a equação (2.44) não é satisfeita. O movimento pode ser classificado como quase periódico.

Temos na figura 2.3 um corte do torus que mostra no aro central uma trajetória que cruzou todos os pontos possíveis, pois  $\alpha$  é irracional e a trajetória nunca se fecha sobre ela mesma. Temos também o aro de fora que mostra o mesmo comportamento. Os círculos e triângulos são referentes ao pontos de cruzamento com o corte de duas órbitas periódicas paralelas. No exemplo mostrado temos 6 pontos para cada órbita, isso quer dizer que para cada volta de  $\theta_2$  foi feito uma marca, como são 6 marcas a última coincide com a primeira e a trajetória fica fechada. Nesse mesmo tempo,  $\theta_1$  deu apenas uma volta.

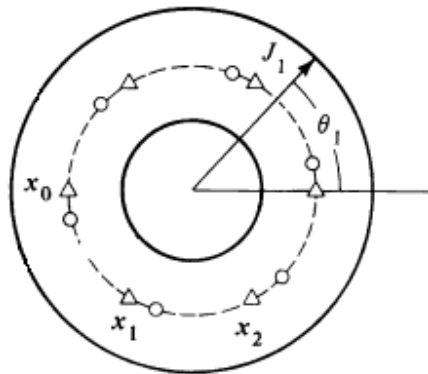


Figura 2.3: Corte do Torus. O círculo e o triângulo pequenos são condições iniciais.

Para prosseguir é necessário o conceito de seção de Poincaré, que será tratado na próxima seção.

## 2.4 Seção de Poincaré

Seção de Poincaré é um corte no espaço de fase. Recebe esse nome pois foi utilizado pela primeira vez pelo matemático Henri Poincaré. Esse método é importante pois podemos representar sistemas com  $n$  dimensões usando  $n - 1$  dimensões. E com isso conseguimos um melhor entendimento em relação à dinâmica presente. Imaginando que um sistema seja governado por equações que são funções do tempo para  $N$  momentos  $p_j$  e para  $N$  posições  $q_j$  o espaço de fase teria  $2N$  e a seção de Poincaré teria  $2N - 1$  dimensões.

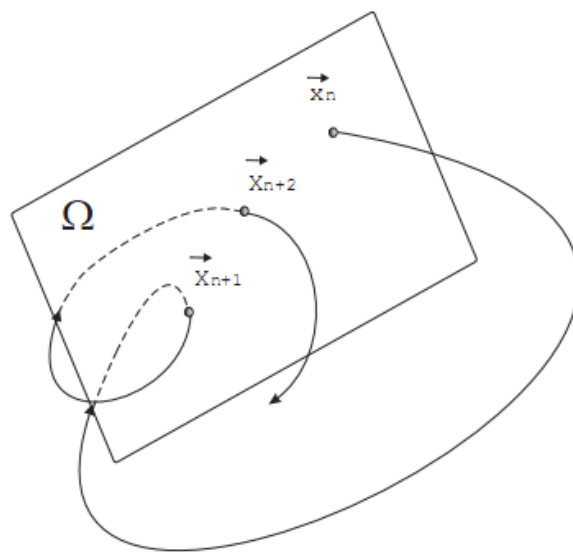


Figura 2.4: Representação da seção de Poincaré. Cada cruzamento da órbita na seção é um ponto marcado.

Na figura 2.4 vemos uma trajetória que cruza a superfície  $\Omega$  primeiramente no pontos  $x_n$ , depois em  $x_{n+1}$  e por último em  $x_{n+2}$ . Uma seção de Poincaré revela padrões do movimento ou regiões mais visitadas o que facilita a caracterização da dinâmica de cada sistema.

## 2.5 Sistemas quase-integráveis

Vimos até agora como que os torus são construídos para sistemas integráveis, onde temos um número de constantes de movimento suficientes para desacoplar as equações diferenciais e assim poder integrá-las. O hamiltoniano usado antes (equação (2.41)) tinha duas constantes de movimento e dois graus de liberdade o que o tornava integrável. Agora podemos fazer uma perturbação no hamiltoniano original a fim de entender como ele reagiria. Assim uma pergunta pode ser feita que é como fica a

integrabilidade do sistema após a introdução dessa perturbação? Primeiro vamos considerar a hamiltoniana perturbada para um sistema bidimensional.

$$H(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(J_1, J_2) + \epsilon H_1(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) \quad (2.45)$$

Aqui  $H_0$  é o mesmo que da equação (2.41) e a ele é somado um segundo hamiltoniano que é função de todas as variáveis. Temos também um parâmetro  $\epsilon$  que diz qual é o tamanho da perturbação. A pergunta que é feita agora é como os torus, tanto racionais como irracionais, ficam após uma perturbação fraca ou mais forte? Três pesquisadores Arnold, Moser e Kolmogorov, deram uma primeira resposta para a essa pergunta e que é o teorema KAM [28]. O teorema KAM diz que quando a perturbação é fraca, os primeiros torus que são destruídos são os torus racionais e os irracionais sobrevivem mudando de forma. Com o aumento da perturbação os torus irracionais também começam a se destruir. A destruição de torus começa com os torus mais próximos dos racionais e o último a ser destruído é aquele cuja frequência é igual ao número mais irracional. Portanto, perturbações fracas não alteram, substancialmente, a maioria dos toros que contem trajetórias quase-periódicas.

O teorema KAM e o teorema de Poincaré-Birkhoff [28] são os principais teoremas que tratam de sistemas dinâmicos perturbados. Através deles é possível entender como o espaço de fase evolui desde o caso não perturbado (regular), passando por pequenas perturbações que dão origem a diversas estruturas até o caso muito perturbado onde o sistema é completamente caótico.



# Capítulo 3

## Tempo de retorno

Uma das formas de se analisar sistemas com diferentes tipos de dinâmica, como por exemplo, sistemas caóticos ou com regiões de aprisionamento de órbitas é através da estatística do tempo de retorno ou de recorrência de Poincaré. Nesse capítulo discutiremos a idéia de tempo de retorno e a forma como é feita a estatística para caracterizar cada tipo de sistema e a relação que existe entre a forma da curva de distribuição de probabilidade e a dinâmica presente.

### 3.1 Tempo de retorno de Poincaré

Tempo de retorno de Poincaré (TRP) é o tempo que o sistema demora para sair de uma determinada região no espaço de fase, evoluir, e retornar a ela novamente. A figura (3.1) mostra uma representação de um retorno. Para isso uma pequena região do espaço de fase é marcada (região A) onde a trajetória começa e retorna após um determinado tempo infinitas vezes [21]. Como exemplo a condição inicial pode ser  $p_0$  e  $q_0$  e a região de retorno A é delimitada por  $p_0 + dp_0$  e  $q_0 + dq_0$ .

O TRP se refere a retornos no espaço de fase, mas também é possível fazer estatística em cima somente do Tempo de Retorno (TR) que é o tempo que o sistema demora para retornar a uma quantidade inicial, não necessariamente do espaço de fase. Por exemplo, se nossas coordenadas generalizadas forem a posição e a velocidade podemos fazer estatística para o retorno a posição inicial ou retorno para a velocidade inicial.

Do ponto de vista da mecânica clássica o TR não possui problema conceitual, no entanto, do ponto de vista da termodinâmica, a idéia de TR desobedece a segunda lei da termodinâmica que diz que o grau de desordem deve sempre aumentar com o tempo, ou seja, um sistema termodinâmico nunca retornaria a um estado inicial naturalmente. Essa questão foi debatida por vários autores como Zermelo, Boltzman, Loschmidt [29] e também gerou dois paradoxos famosos o de Loschmidt e o de Zermelo. O primeiro diz que se temos um sistema determinístico, ao inverter o sentido das velocidades a entropia diminui. O segundo diz que se o sistema retorna infinitas vezes a uma condição inicial

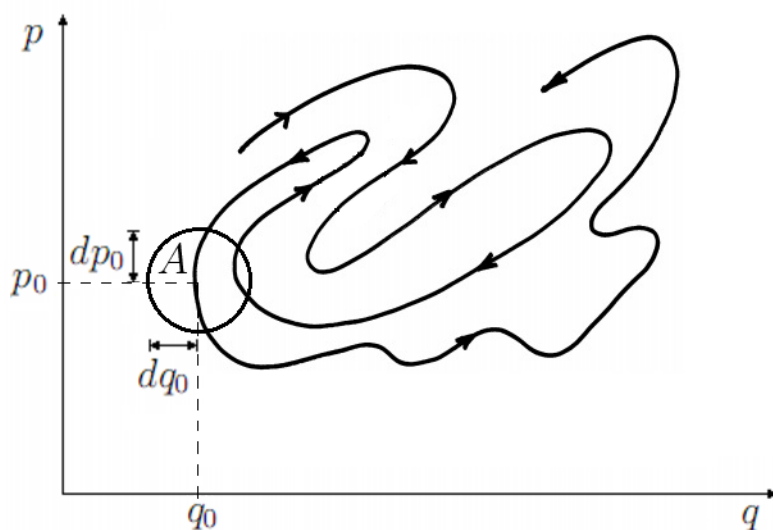


Figura 3.1: Representação de uma recorrência.

a entropia também retorna [29]. A explicação de Boltzman para isso foi de que existe a possibilidade de que um sistema retorne a uma condição inicial do espaço de fase, mas que a probabilidade disso ocorrer é infinitamente pequena [30] para sistemas típicos da termodinâmica (com muitos elementos). Ele calculou o tempo de retorno para um modelo de gás de partículas [22] e mostrou que esse tempo de retorno seria infinitamente grande. Uma discussão mais aprofundada sobre esse assunto, pode ser lida em [29]. Por causa dessas questões não é comum utilizar a análise de TRP para sistemas com muitos graus de liberdade, mas é muito utilizada para sistemas como bilhares que geralmente possuem uma configuração simples com poucos graus de liberdade.

Depois de conhecer a idéia fundamental sobre tempo de retorno, estamos interessados em saber quais modelos estatísticos podem ser usados para descrever distribuições de tempo de retorno.

## 3.2 Estatística do tempo retorno

A forma mais usual para análise do tempo de retorno é através da distribuição de probabilidade para um conjunto de dados que são os tempos de cada retorno, ou seja, a análise é probabilística. Ela é feita encontrando a melhor equação para descrever o comportamento da curva de densidade de probabilidade. Cada tipo de comportamento do sistema gera uma curva diferente.

Para isso vamos considerar que  $P(\tau, A)$  seja a densidade de probabilidade de que uma trajetória retorne a uma região  $A$  do espaço de fase depois de um intervalo de tempo entre um retorno e outro. Usaremos  $\tau_{rec}$  como sendo o tempo decorrido entre

dois retornos e  $\tau$  para o tempo. O volume do espaço de fase é  $\Gamma$  e  $A$  é a região de retorno sendo  $A \subset \Gamma$ . É comum introduzir essa densidade de probabilidade usando o seguinte limite [21, 33]:

$$P_{rec}(\tau) = \lim_{\Gamma(A) \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(A)} P(\tau, A). \quad (3.1)$$

Nesse caso, se o limite existir, não existe mais a dependência com  $\Gamma$  e assim temos uma densidade de probabilidade de Poincaré.

Para que essa densidade de probabilidade seja válida, Marck Kac mostrou em seus trabalhos [31, 32] que ela deve obedecer:

$$\int_0^\infty P_{rec}(\tau) d\tau = 1, \quad (3.2)$$

para que seja normalizada, e a média do tempo de recorrência deve ser:

$$\tau_{rec} = \langle \tau \rangle = \int_0^\infty \tau P_{rec}(\tau) d\tau. \quad (3.3)$$

As equações (3.2) e (3.3) são conhecidos como lemas de Kac. E ainda é necessário que o tempo de recorrência médio seja finito:

$$\tau_{rec} < \infty. \quad (3.4)$$

O trabalho de Kac é um dos mais significativos depois de Poincaré, Zermelo e Boltzmann. Seus trabalhos citados são dos anos 1947 e 1959, e de lá para cá, é aparente uma falta de interesse para esse tipo de estudo uma vez que para modelos estatísticos realísticos o tempo de recorrência médio é infinito e isso impede que a análise do tempo de retorno seja feita. Entretanto percebeu-se que para sistemas caóticos com poucos graus de liberdade os tempos de retornos são relativamente baixos, assim esse tipo de análise pode ser feita de maneira bastante simples.

Em geral, para sistemas totalmente caóticos a distribuição de probabilidade para tempo de retorno é exponencial. Em [22] é mostrada uma distribuição da seguinte forma:

$$P_{rec}(\tau) = \frac{1}{\tau_{rec}} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{rec}}\right), \quad (3.5)$$

onde,

$$\tau_{rec} = 1/h, \quad (3.6)$$

sendo  $h$  chamado de entropia de Kolmogorov-Sinai que é uma característica da divergência entre órbitas fechadas para sistemas caóticos. Reescrevendo a equação (3.5) temos que

$$P(\tau) = h \exp(-h\tau). \quad (3.7)$$

A equação (3.7) descreve como seria a densidade de probabilidade para sistemas

caóticos onde os retornos não são tão longos.

Existe uma forma simples de se chegar à distribuição do tipo exponencial usando tempos discretos (mostrada em [24]). Nesse caso partimos de uma equação geral da estatística para a distribuição binomial. Para isso, considere que um experimento seja feito um número  $n$  de vezes, e dele só podemos tirar dois resultados: falso ou verdadeiro. Escolhendo o resultado verdadeiro, a probabilidade de que ele ocorra a cada realização do experimento é dado por  $p$  e a de que ele não ocorra é  $(1 - p)$ . O número de verdadeiros em uma série de  $n$  experimentos é dado por  $x$ . Logo a equação que vai descrever a curva de densidade de probabilidade para  $x$  é escrita como:

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}. \quad (3.8)$$

Para o nosso caso o número de experimentos  $n$  é o número de tempos discretos de uma única trajetória denominado  $T$ . Os dois tipos de eventos são o retorno e o não retorno em cada tempo  $T$ . A probabilidade do retorno é  $p$  e a do não retorno é  $1 - p$ .  $\tau$  é o número de retornos na série de tempos  $T$ . Também temos que considerar o fato de que a trajetória obrigatoriamente deve se fechar no último tempo, logo, existe um retorno no último tempo  $T$ , assim temos  $\tau - 1$  retornos em  $T - 1$  tempos. Agora podemos reescrever a equação (3.8) para o nosso caso como:

$$P(T) = \frac{(T-1)!}{(\tau-1)!(T-\tau)!} p^\tau (1-p)^{T-\tau}. \quad (3.9)$$

Para essa dissertação só o primeiro retorno é importante, por isso, faremos  $\tau = 1$ ,

$$P(T) = p(1-p)^{T-1}, \quad (3.10)$$

que pode ser reescrita como:

$$P(T) = \frac{p}{p-1} \exp(T \ln(1-p)). \quad (3.11)$$

Podemos dizer que probabilidade de um retorno a cada tempo  $T$  é muito pequena, logo  $p \ll 1$  e a equação aproximada fica:

$$P(T) = p \exp(-Tp), \quad (3.12)$$

que é a mesma equação (3.7).

O decaimento do tipo exponencial para distribuição de probabilidades em função do tempo é uma propriedade de sistemas aleatórios e totalmente caóticos, com espaço de fase ergódico, ou seja, com o espaço de fase onde qualquer região tem a mesma probabilidade de ser visitada.

No entanto esse tipo de distribuição não é o único possível. Ainda existe mais um

tipo de distribuição que é a do tipo lei de potência:

$$P_{rec}(\tau) \sim 1/\tau^\gamma, \quad (3.13)$$

onde  $\gamma$  é chamado de expoente de recorrência.

Segundo [22, 33, 25], esse tipo de distribuição mostra que o sistema possui um espaço de fase não uniforme. Esse tipo de espaço de fase pode apresentar regiões mais visitadas que outras, não garantido a ergodicidade. Assim é possível existir tempos de recorrência muito altos e por isso a distribuição se modifica.

O estudo de recorrência pode ser bastante aplicado a sistemas com poucos graus de liberdade, em geral para sistemas simples como bilhares, mapas, pois assim o tempo de recorrência não é demasiadamente longo e a estatística pode ser feita. Mais adiante (no capítulo 4 ) veremos que esse tipo de distribuição, exponencial e lei de potência, são muito comuns em bilhares.

# Capítulo 4

## Bilhares

Nesse capítulo falaremos de bilhares de uma maneira mais geral. A princípio será feito um breve histórico sobre o estudo de bilhares clássicos, qual a razão para usá-los e algumas aplicações. Mostraremos as maneiras mais usadas para se analisar a dinâmica de bilhares, como tempo de recorrência e alguns resultados mais conhecidos na literatura. Falaremos dos possíveis tipos de comportamento e a relação deles com a geometria de cada bilhar. Discutiremos a idéia de bilhares com aberturas e a sua relação com o tempo de escape. Apresentaremos como é feita a estatística do tempo de retorno empregada nesta dissertação.

### 4.1 Dinâmica de bilhares

A forma mais comum e simples para se analisar o movimento confinado dentro de um bilhar é colocar uma partícula no seu interior com uma velocidade em uma determinada posição inicial. Dessa forma, a direção do movimento será constantemente mudada depois de cada colisão ocorrida com as paredes. Geralmente as colisões são elásticas e a mudança que ocorre na velocidade é a inversão do sentido da componente perpendicular à parede do bilhar. Naturalmente, é possível modelar as colisões com as paredes de muitas outras formas, como uma colisão inelástica, no entanto para esse trabalho todas as colisões serem tratadas como perfeitamente elásticas. A figura 4.1 mostra geometricamente como é cada colisão.

Como consequência de colisões elásticas temos que o módulo da velocidade da partícula confinada no bilhar é sempre constante e a única energia que ela possui é

$$E_c = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2. \quad (4.1)$$

Essa é a energia cinética da partícula que manter-se-á constante durante toda a trajetória, pois o tipo de colisão considerado implica na conservação da energia. Por isso, não interfere na dinâmica do movimento, e no capítulo de resultados a variação da

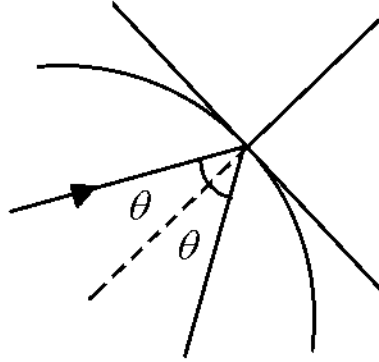


Figura 4.1: Colisão de uma partícula com uma parede rígida.

energia total como parâmetro será ignorada.

Uma partícula dentro de um bilhar, mesmo sendo um sistema muito simples, pode possuir uma dinâmica complexa apresentando muitos comportamentos diferentes, como o regular (completamente integrável), o caótico e aqueles que possuem um espaço de fase dividido (será explicado mais tarde). Dentro do conjunto de bilhares com dinâmica regular podemos citar dois exemplos mais comuns: o bilhar em forma de retângulo e o bilhar em forma de círculo. O bilhar retangular possui duas constantes de movimento a energia cinética na horizontal e na vertical e apenas são possíveis dois ângulos de colisão para cada  $\theta_0$ , como podemos ver na figura 4.2(a).

O bilhar circular possui duas constantes de movimento, uma é a energia cinética e a outra é o momento angular em relação ao centro do círculo. Também podemos fazer uma relação com as coordenadas ação ângulo descritas no capítulo 2, sendo assim temos duas frequências constantes: a primeira é a frequência entre duas colisões sucessivas e a segunda é a frequência de rotação no círculo.

Nesses dois casos temos constantes de movimento suficientes para garantir que o sistema seja integrável.

Como exemplo de bilhares com dinâmica caótica podemos citar os bilhares que aparecem nos trabalhos de Sinai [1] e Bunimovich [2]. Esses trabalhos são muito importantes, pois são os primeiros a mostrar esse tipo de comportamento em bilhares.

O bilhar de Bunimovich, figura 4.3(a), ou bilhar do estádio como é mais conhecido, é composto por dois semicírculos ligados nas extremidades por duas semi-retas. Nesse caso apenas a energia cinética total é conservada. Podemos pensar em conservação do momento angular, como no bilhar circular, mas a existência das paredes retas não permitem que isso ocorra. Se pensarmos na conservação de cada componente da energia cinética, que funciona para o bilhar retangular, também não é possível, pois os semicírculos não permitem.

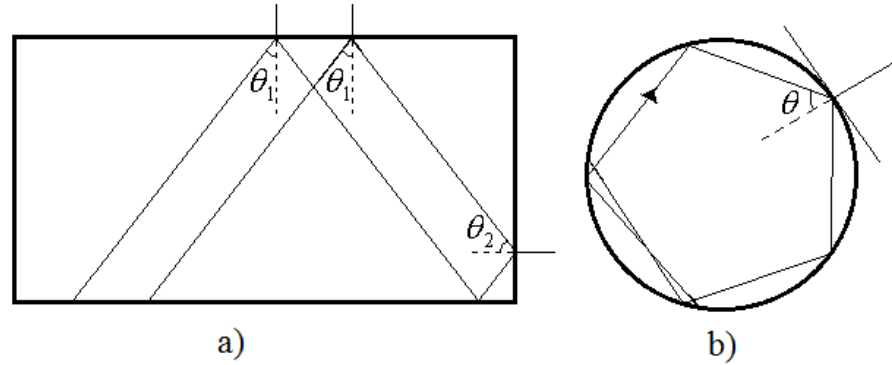


Figura 4.2: Bilhares regulares: a) bilhar retangular; b) bilhar circular.

No caso do bilhar de Sinai, figura 4.3(b), o círculo no centro não permite a conservação de cada componente da energia cinética, nem do momento angular, só a energia total é conservada.

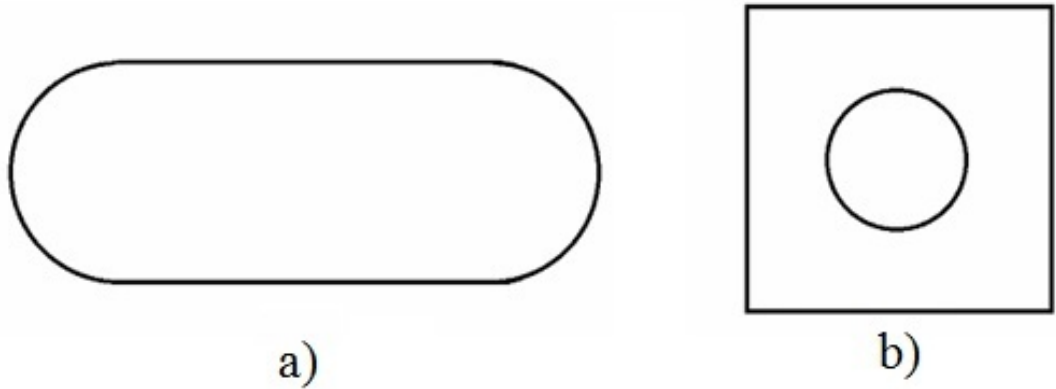


Figura 4.3: Exemplo de bilhares caóticos: a) Bilhar do Estádio; b) Bilhar de Sinai.

Além dos bilhares com espaço de fase completamente caóticos e completamente regulares (integrável), ainda existem aqueles com o espaço de fase dividido que são menos entendidos e que ainda são bastante estudados. O espaço de fase dividido significa que o movimento da partícula no bilhar pode ser regular, pode ser caótico e ainda pode alternar entre os dois durante uma trajetória. Isso depende da condição inicial dada. Esse tipo de comportamento tem uma relação direta com a geometria. Na literatura encontramos exemplos, sugeridos em [3], de bilhares com esse tipo de comportamento. São chamados de bilhares cogumelos (devido a forma que possuem) e são mostrados



na figura 4.4.



Figura 4.4: Bilhares cogumelo [3].

Na figura 4.5 temos um exemplo de uma trajetória que fica confinada no semicírculo superior, dessa forma não sofre a influência das paredes retas e assim seu movimento é regular. No entanto, se uma trajetória visitar o semicírculo e também o retângulo da base o movimento deixa de ser regular e se torna caótico.

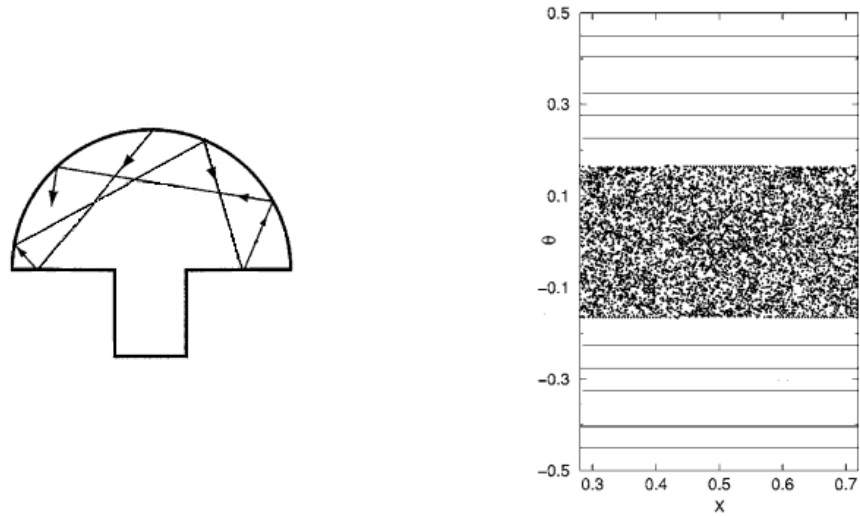


Figura 4.5: Trajetória regular em um bilhar cogumelo e à direita o espaço de fase mostrando claramente as regiões de caos e de regularidade.

Mostramos até agora exemplos de bilhares clássicos onde a energia total é conservada, no entanto o uso de bilhares pode ser bem mais amplo.

Podemos citar mais sistemas envolvendo bilhares como em [34], onde um campo magnético ortogonal é aplicado nos bilhares quadrado e de Sinai para desenvolver um método de busca de órbitas periódicas em bilhares perturbados por campos.

Temos também o caso onde duas partículas são colocadas dentro de um bilhar unidimensional sujeitas a um potencial de interação entre as partículas (potencial de

Yukawa). Nesse caso trocas de energia são permitidas e a razão entre as massas acaba sendo um parâmetro muito importante para a regularidade do sistema e é justamente isso que foi estudado [8].

Em [7] o mesmo sistema anterior foi estudado mas o bilhar possuía paredes suaves para que as colisões com as paredes deixassem de ser pontuais. Usar paredes suaves é uma forma de deixar o sistema um pouco mais realístico, pois na natureza não encontramos paredes perfeitas e esse efeito muda completamente a dinâmica do sistema.

Em geral o uso de bilhares é bastante comum, pois são relativamente simples de modelar e apresentam uma grande quantidade de comportamentos e isso é uma das razões para a aplicação deles nesta dissertação.

#### 4.1.1 Órbitas periódicas marginalmente instáveis

Como já foi visto, para bilhares clássicos podemos ter três tipos de comportamentos mais comuns que são o regular, o caótico e o dividido. No entanto, ainda existem bilhares que geram órbitas com um comportamento especial conhecidas pelo nome "*Marginally Unstable Periodic Orbits*" (MUPOS). MUPOS normalmente ocorrem em sistemas com comportamento dividido, nesse caso no contexto de bilhares, uma MUPO seria uma órbita com comportamento quase regular dentro da região caótica.

No caso de bilhares cogumelos dissemos que órbitas confinadas na parte com o formato de semicírculo tinham um comportamento regular e órbitas que visitavam tanto o semicírculo como o retângulo da base apresentavam um comportamento caótico. As MUPOS, neste caso, são órbitas que colidem com o semicírculo e com o retângulo e são quase estáveis. Condições iniciais dentro dessas regiões permitem que a órbita permaneça um tempo muito longo em um regime quase estável em uma região que a princípio seria caótica. Nessas regiões o expoente de Lyapunov vale zero. Esse expoente mede o grau de divergência entre trajetórias, se for positivo o sistema é caótico e se for nulo, não há divergências e o sistema é considerado regular. Recomendamos [25, 26] para maiores explicações.

Na figura 4.6 são representadas MUPOS presentes em bilhares com paredes paralelas.

## 4.2 Bilhares abertos

Em todos os casos anteriores os bilhares mostrados eram fechados, assim uma partícula em seu interior sempre teria seu movimento confinado. No entanto podemos fazer uma modificação que é colocar uma abertura em uma das paredes, assim temos uma nova característica.

Ao colocar uma abertura em um bilhar estamos na verdade colocando uma região

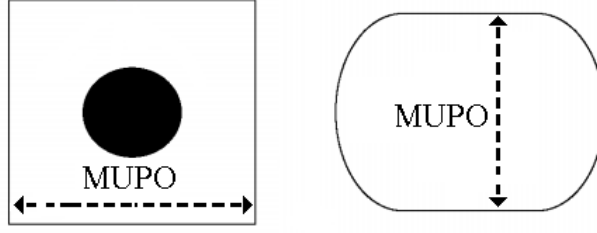


Figura 4.6: MUPOS presentes no bilhar de Sinai e no bilhar do estádio [26].

de partida e uma região de escape para a partícula. O tipo de análise mais comum para esse caso é contar o tempo entre a entrada e a saída da partícula do bilhar de estudo.

Uma das razões para essa modificação é uma maior proximidade com um experimento real. Podemos imaginar que exista uma cavidade e essa possui uma abertura para a entrada de partículas. Não seria possível colocar uma fonte de partículas dentro dessa cavidade pois ela seria um obstáculo, assim a cavidade aberta é a única possibilidade. Essa abertura possibilita a entrada de partículas emitidas pela fonte e depois a saída dessas partículas pela mesma abertura. Podemos também imaginar um sensor colocado fora da cavidade para registrar o momento da saída. Assim a partícula entrando e interagindo com a cavidade coleta informação sobre a mesma, essa informação é mostrada através do tempo de retorno que nesse caso é o tempo entre a entrada e a saída da partícula pela abertura.

Mostraremos mais adiante que em bilhares caóticos esses tempos de retorno são geralmente mais curtos quando comparados com aqueles obtidos em bilhares que possuem regiões de aprisionamento de órbitas. Isso é visto na curva da distribuição desses tempos.

### 4.3 Tempo de retorno em bilhares

No capítulo 3 discutimos a estatística do tempo de retorno de uma maneira mais geral, agora resumiremos alguns resultados da literatura sobre tempo de retorno aplicado a bilhares e à forma da curva de densidade de distribuição.

A estatística do tempo de retorno, aplicada a bilhares, é definida [25] como:

$$Q(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_\tau}{N}, \quad (4.2)$$

onde  $Q(\tau)$  pode ser entendido como uma função distribuição acumulada dos tempos

de retorno  $\tau$ . O valor  $N$  é o número total de retornos, ou seja, para o nosso caso é o próprio número de condições iniciais dadas, pois cada órbita começa e termina na abertura no bilhar.  $N_\tau$  é o número de retornos que ocorrem depois de um tempo  $\tau$ , ou seja, é a quantidade de órbitas que deixam o bilhar com um tempo maior que  $\tau$ .

Para sistemas completamente caóticos,  $Q(\tau)$  apresenta um decaimento exponencial (como foi mostrado no capítulo anterior). Quando o sistema apresenta tempos de retorno longos, e regiões de aprisionamento de órbitas estão presentes o decaimento é tipo lei de potência:

$$Q(\tau) \propto \tau^{-\gamma_{esc}}. \quad (4.3)$$

É aceito que quando o expoente  $\gamma_{esc} \sim 2$  o sistema possui regiões de aprisionamento com o espaço de fase dividido e talvez MUPOS [25, 23].

No entanto é obtido um expoente  $\gamma_{esc} \sim 1$  quando condições iniciais são dadas exatamente dentro de MUPOS. Em [26] esse valor de expoente é calculado analiticamente usando uma MUPO que aparece em bilhares onde existem paredes paralelas.

Tabela 4.1: *Relação entre a dinâmica o tipo de decaimento e os expoentes.*

Dinâmica	Tipo do Decaimento	Exp. de Decaimento
Regular	-	-
Caótica	Exponencial ( $Q(\tau) \propto e^{-\tau}$ )	-
Dividida	Lei de Potência ( $Q(\tau) \propto \tau^{-\gamma_{esc}}$ )	$\gamma_{esc} \sim 2$
Nas MUPOS	Lei de Potência ( $Q(\tau) \propto \tau^{-\gamma_{esc}}$ )	$\gamma_{esc} \sim 1$

Por fim apresentamos um resumo na tabela 4.1 que relaciona cada tipo de dinâmica com a forma de decaimento e os expoentes quando existe lei de potência.

# Capítulo 5

## Resultados

Nesse capítulo falaremos dos resultados obtidos para cada modelo de bilhar trabalhado. Primeiramente explicaremos o método criado para realizar os cálculos numéricos e a maneira que foram implementados computacionalmente. Esse método nos permitiu calcular valores como: pontos de colisão da partícula com o bilhar, velocidade da partícula após cada colisão, tempo de retorno, distância percorrida, ângulos de colisão, ângulo de escape e a estatística do tempo de retorno. Em seguida mostraremos detalhadamente os resultados para cada tipo de bilhar utilizado.

### 5.1 Método de cálculo

Em nosso trabalho todos os cálculos numéricos realizados, tais como: pontos de colisão com o bilhar, ângulos de colisão (figura 4.1), componentes horizontal e vertical do vetor velocidade, tempo de retorno; foram feitos usando códigos próprios escritos em linguagem C e compilados no compilador Dev-C++ 5.0. Todos os gráficos apresentados foram feitos usando o *software* matemático MATLAB 7.0.

Para realizar os cálculos criamos um algoritmo para cada tipo de parede que seria empregada nos bilhares estudados. Nossa idéia principal foi dividir o bilhar, que se pretendia modelar, em setores (ver figura 5.1), cada setor foi escrito como sendo uma subrotina dentro do programa.

Para a modelagem dos bilhares cada uma de suas paredes foram escritas com equações, isso quer dizer que semi-retas (setores 2,4,6,8 do exemplo na figura 5.1) foram modeladas com equações do tipo

$$y = ax + b, \tag{5.1}$$

que é uma equação de reta. Depois delimitamos o intervalo de existência para  $x$  e  $y$  e o valor das constantes  $a$  e  $b$  de acordo com a origem do sistema de coordenadas ortogonal  $(x, y)$  e do tamanho de cada bilhar.

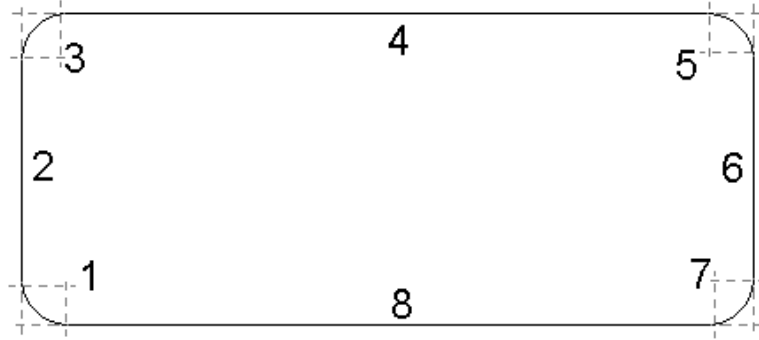


Figura 5.1: Exemplo da divisão do bilhar em setores.

Para paredes curvas (setores 1,3,5,7 da figura 5.1), foi escolhida a equação de circunferência pela sua simplicidade. A equação padrão para esse caso é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (5.2)$$

Essa equação também deve receber as constantes  $a$  e  $b$  de acordo com a região do espaço para o qual ela deve servir como parede e também deve receber um intervalo para  $x$  e  $y$  para que somente um setor circular pré-estabelecido seja válido no bilhar.

Como nosso objeto de estudo é o movimento de uma partícula no interior de um bilhar, também devemos ter uma equação para sua trajetória. Nós usamos uma equação de reta, que pode ser escrita como função do ângulo de entrada que a trajetória faz com a normal ao eixo vertical, e ela é escrita como

$$y = \frac{v_y}{v_x}x + c, \quad (5.3)$$

onde

$$v_y = |v| \cos(\theta), \quad v_x = |v| \sin(\theta). \quad (5.4)$$

Em todos os casos mantivemos sempre  $|v| = 1$ , pois como já foi dito isso não interfere na dinâmica dos nossos bilhares.

A seguir mostraremos dois exemplos que serviram de base para entender todo o método empregado.

### 5.1.1 Primeiro exemplo: Bilhar retangular com abertura

A figura 5.2 mostra nosso primeiro exemplo, o bilhar retangular. As equações usadas para modelar cada das paredes são listadas a seguir:

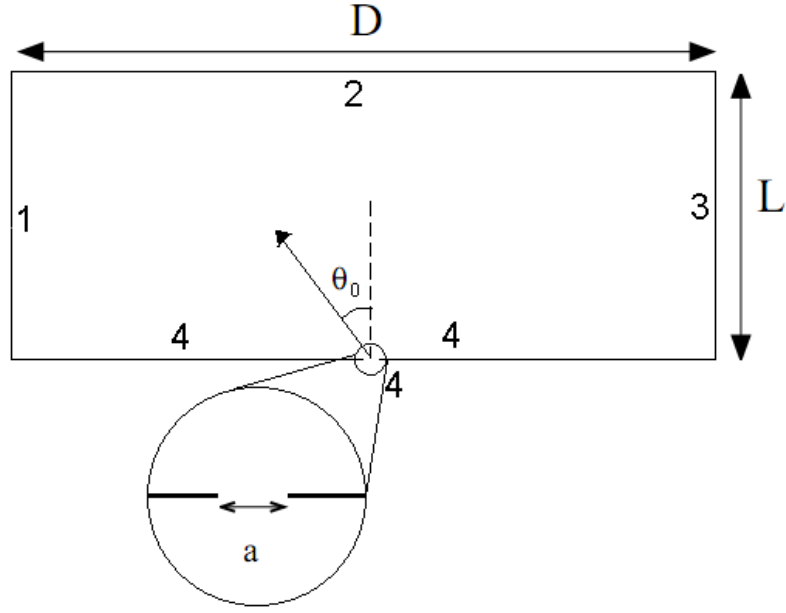


Figura 5.2: Primeiro exemplo: bilhar retangular

$$\begin{aligned}
 1) & x = 0 \quad \text{para } 0 \leq y \leq L \\
 2) & y = L \quad \text{para } 0 < x < D \\
 3) & x = D \quad \text{para } 0 \leq y \leq L \\
 4) & y = 0 \quad \text{para } 0 < x < (D - a)/2 \text{ ou } (D + a)/2 < x < D
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Com as equações (5.5) o bilhar fica delimitado dentro do algoritmo.

Uma trajetória começa quando uma posição e um ângulo de início  $\theta_0$  são dados, assim temos um ponto inicial de uma trajetória na figura 5.2. Através desse ângulo inicial as componentes vertical e horizontal da velocidade já ficam estabelecidas, usando as equações (5.4). O nosso código foi feito para primeiramente calcular todos os possíveis pontos de colisão com cada parede. Assim depois da condição inicial estabelecida, o segundo passo é calcular onde a equação de reta, que descreve a trajetória, se cruza com cada equação que descreve as paredes do bilhar, não importando se é interna ou externamente. A figura 5.3 mostra quais seriam todos os possíveis pontos de colisão no bilhar retangular.

Depois que todos esses pontos são calculados, naturalmente excluimos o ponto de partida e os pontos que estão fora do bilhar (números 1,3 e 4 na figura 5.3), restando apenas o verdadeiro ponto (número 2 na figura 5.3). Todos os pontos de cruzamento sempre foram calculados montando um sistema entre as equações (5.3) e (5.5). Depois que cada ponto de colisão era escolhido as velocidades eram recalculadas e equações (5.3) eram refeitas para o novo pedaço da trajetória.

O cálculo dos pontos de colisão de uma partícula dentro de um bilhar retangular é bastante simples e poderia ser feito de muitas outras maneiras, até mais simples do que

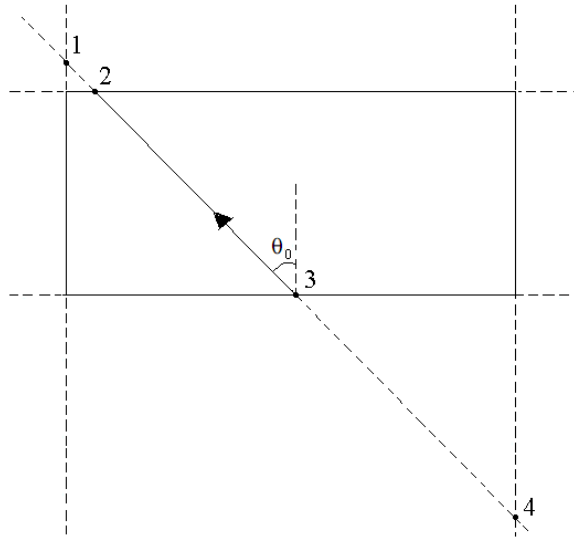


Figura 5.3: Possíveis pontos de cruzamento. No caso do bilhar retangular sempre são 4 (pontos numerados).

a que foi descrita, no entanto o método escolhido se demonstrou mais geral e passível de ser aplicado em sistemas mais complicados como no caso seguinte.

### 5.1.2 Segundo exemplo: Setor circular

Nosso segundo exemplo não é um bilhar inteiro, mas sim uma parte que será usada em quase todos os casos analisados. Trata-se de um setor circular com duas semi-retas, representado na figura 5.4.

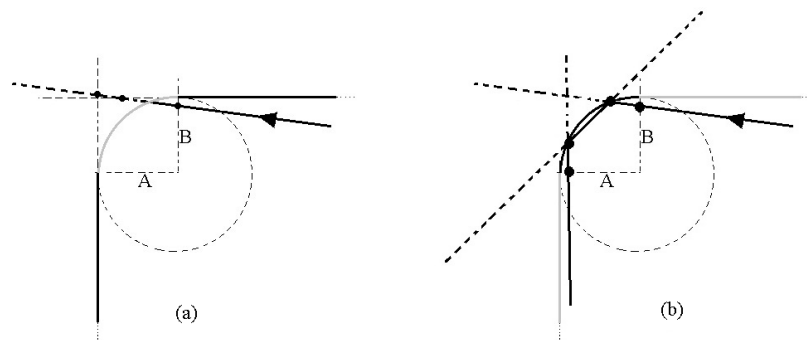


Figura 5.4: Possíveis pontos de cruzamento no setor circular.

Note que agora colocamos duas semi-retas que não fazem parte da parede (reta A e B da figura 5.4), elas só servem para auxiliar na organização do algoritmo. A trajetória continua sendo descrita pela equação (5.3). A condição inicial ainda é descrita pelo ângulo inicial e a posição. Assim, depois de termos a equação para a trajetória, o programa calcula todos os pontos de cruzamento com as equações de reta. Esses pontos são mostrados como pontos pretos da figura 5.4(a). Aqui também excluimos



os pontos que estão fora do bilhar e escolhemos um ponto de colisão, se estiver sobre uma semi-reta do bilhar, ou um ponto de marcação, se esse estiver sobre uma das retas auxiliares. Na figura 5.4(a) o ponto escolhido seria o ponto de marcação que está sobre a reta (B). No próximo passo o programa chamaria uma subrotina, só com o setor circular (figura 5.4(b)), e assim calcularia o primeiro ponto de colisão com a parte curva. No exemplo mostrado na figura 5.4(b) a sub-rotina ainda calcularia mais dois pontos sobre a parte arredondada, e o próximo seria um ponto sobre a reta A que é o ponto de marcação para sair da sub-rotina e voltar para o programa geral.

A divisão do programa em várias sub-rotinas é importante pois assim ele se torna mais geral e mais simples de ser modificado para um novo modelo de bilhar.

O programa pode gravar todas as variáveis que forem pedidas como: pontos de colisão, tempo, o comprimento da trajetória, as componentes da velocidade a cada colisão, os ângulos de colisão.

Para bilhares abertos, o programa registra o tempo entre a entrada da partícula no bilhar e sua saída. O término da trajetória (ou um retorno) se dá quando o programa registra um ponto de colisão com a abertura do bilhar, ou seja, não há uma colisão mas sim a saída da partícula. Este tempo é gravado em um arquivo para posterior análise da estatística do tempo de retorno. Se for necessário fazer um espaço de fase, o programa interrompe a trajetória após um determinado número de colisões que é estabelecido inicialmente como parâmetro.

A seguir apresentaremos os principais modelos de bilhar que foram usados no trabalho desenvolvido.

## 5.2 Primeiro modelo: Bilhar com cantos arredondados em forma de $1/4$ de círculo

O primeiro bilhar usado é mostrado na figura 5.5. A idéia de usar essa configuração surgiu da procura por um sistema simples que pudesse apresentar os comportamentos regular, caótico e possivelmente dividido com a presença de MUPOS e regiões de aprisionamento de órbitas, conforme mencionamos no capítulo anterior. Esse bilhar também surgiu da necessidade de simular melhor sistemas reais, tais como cavidades, que mesmo muito bem construídos sempre podem apresentar irregularidades.

Nesse bilhar temos vários parâmetros que podem ser modificados. O primeiro é  $n$  que é o comprimento da parede reta que une os cantos arredondados.  $R$  é o valor do raio para cada  $1/4$  de círculo,  $L$  é altura e  $D$  é o comprimento total. A abertura para escape que vai ser utilizada para os cálculos de tempo de retorno é representada por  $a$ .

Esse modelo possibilita obter um comportamento regular (integrável) como limite, quando o valor do raio é  $R = 0$  com  $n > 0$  e  $L > 0$ , ou quando  $R > 0$  com  $n = 0$  e

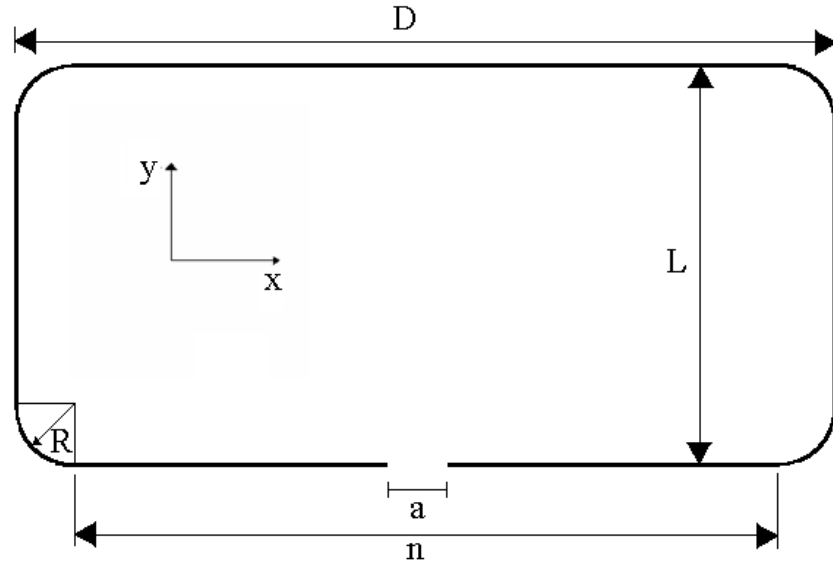


Figura 5.5: Bilhar retangular com cantos arredondados.

$L = 2R$ . No primeiro caso ele se torna um bilhar retangular e no segundo ele se torna um bilhar circular. Podemos obter também o caso completamente caótico quando fazemos  $R > 0$ ,  $L = 2R$  e mantemos  $n > 0$ . Essa configuração dá origem ao bilhar do estádio que já é muito conhecido.

Para deixar mais claro, representamos esquematicamente todos os casos limites na figura 5.6.

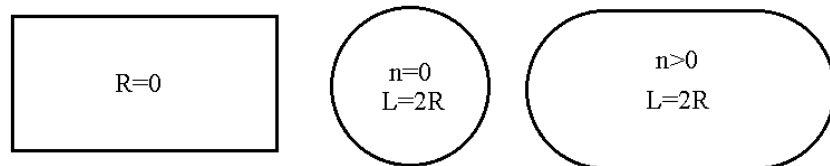


Figura 5.6: Casos limites: retangular, circular, estádio.

A partir de agora faremos uma primeira abordagem discutindo o espaço de fase e algumas órbitas de maior interesse para os casos integráveis. Depois passaremos para discussão a respeito do tempo de retorno quando temos uma razão pequena de  $R/L$ .

### 5.2.1 Análise do espaço de fase

A primeira análise foi realizada através do espaço de fase para que fosse possível desenvolver uma idéia geral sobre o comportamento de cada configuração do bilhar. A figura 5.7(a) mostra o espaço de fase para o bilhar circular, nele podemos ver várias linhas verticais, algumas totalmente preenchidas, outras com pontos bem definidos.

Isso se deve ao fato de que no bilhar circular, uma vez dado o ângulo inicial ( $\theta_0$ ), ele será o ângulo de colisão e nunca muda durante toda a trajetória da partícula.

Na figura 5.7 temos um exemplo que é um espaço de fase para o bilhar circular onde os valores dos parâmetros são:  $R = 1$ ,  $n = 0$ ,  $L = 2R$  e  $a = 0$ . Podemos ver que na linha em  $\theta \sim 0.7854rad$  (indicada pela flecha) apenas duas velocidades são possíveis (no eixo  $x$ ), essa trajetória descreve um quadrado. As linhas onde existem pontos bem definidos são órbitas periódicas com um número não muito grande de pontos de colisão diferentes.

Uma parte das linhas muito preenchidas são devidas a órbitas, também periódicas, mas que possuem muitos pontos de colisão possíveis e demoram para se fechar. Uma característica desse exemplo tipicamente regular, é que dada a condição inicial, ( $\theta_0$ ) o sistema nunca sai de uma determinada linha vertical do espaço de fase.

Ainda temos o caso de órbitas que nunca se fecham, são órbitas quase periódicas. Nesse caso as linhas do espaço de fase seriam densamente preenchidas uma vez que nenhum ponto poderia ser exatamente igual a outro.

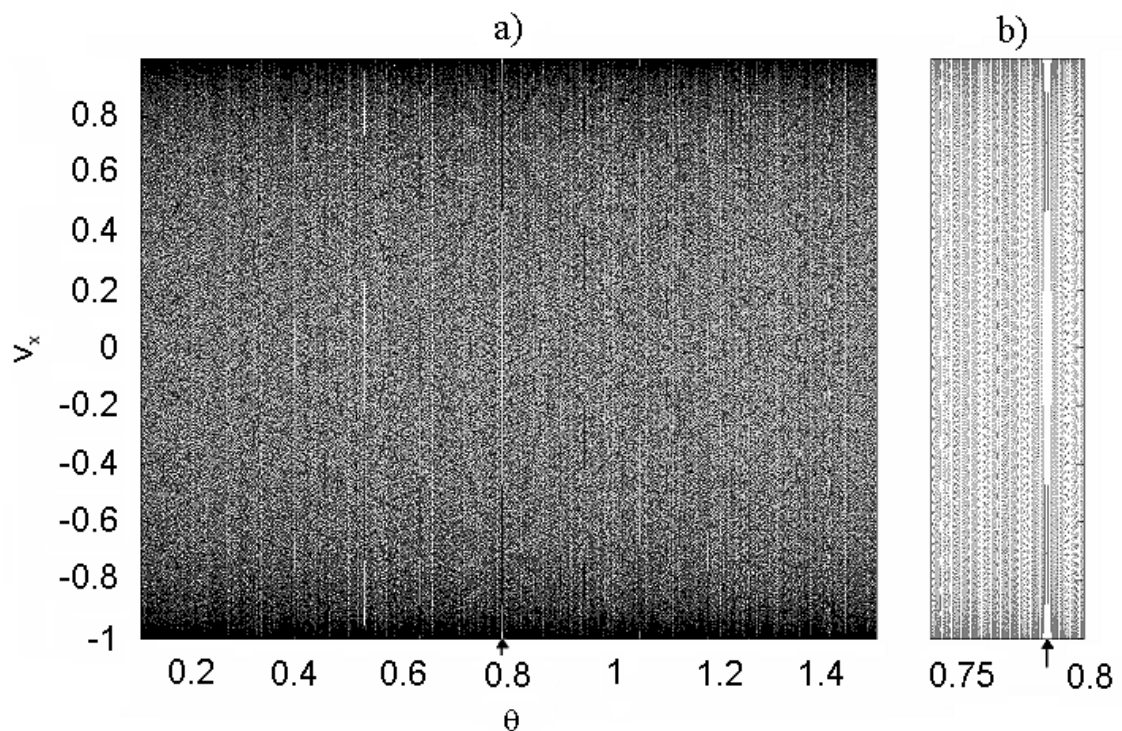


Figura 5.7: Espaço de fase para o bilhar circular (a) e um *zoom* (b). Comportamento da velocidade no ( $V_x$ ) pelo ângulo de colisão ( $\theta$ ).

Fizemos também um espaço de fase (figura 5.8) para o bilhar retangular. Nele podemos ver que para cada condição inicial apenas duas velocidades são possíveis no eixo  $x$ . O sinal positivo da velocidade é para quando a partícula se move para a direita e o sinal negativo é para quando a partícula está indo para a esquerda.

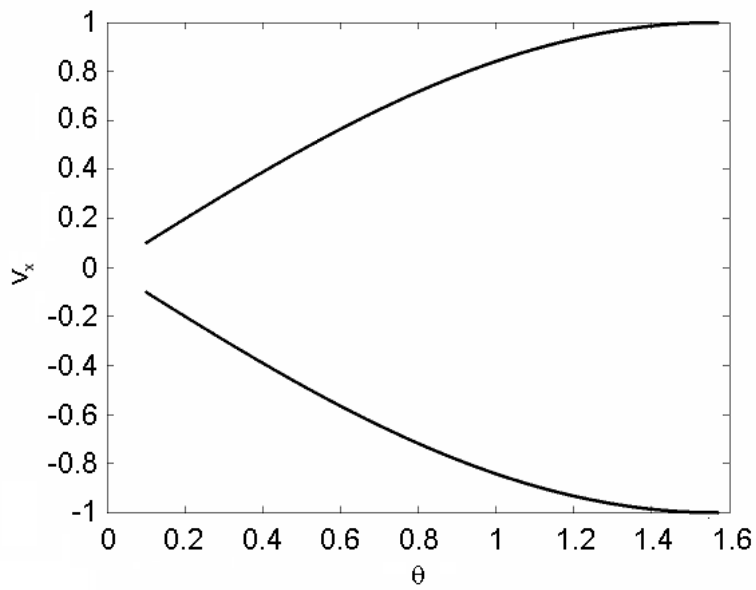


Figura 5.8: Espaço de fase para o bilhar retangular.

Esses dois primeiros exemplos de movimento regular (figuras 5.7 e 5.8) foram obtidos com os limites mostrados na figura 5.6, cada um dos espaços de fase foram feitos com 5000 condições iniciais ( $\theta_0$ ) e todos partem do mesmo ponto que é em  $D/2$  da parede inferior. Nesses casos ainda não temos aberturas no bilhar, ou seja,  $a = 0$ .

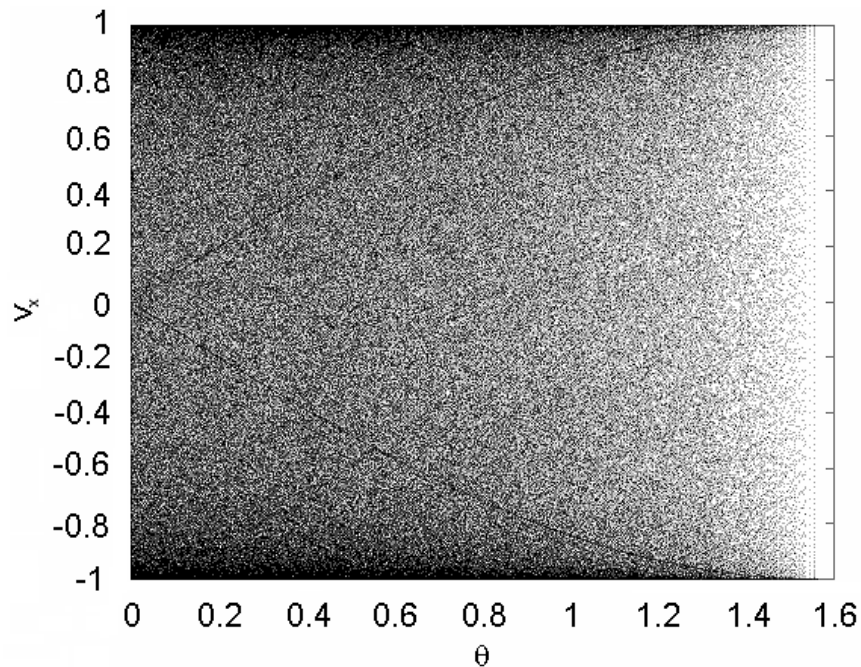


Figura 5.9: Espaço de fase para o bilhar do estádio.

Na figura 5.9 temos mais um espaço de fase feito para o limite quando o nosso bilhar se torna equivalente ao bilhar do estádio (figura 5.6) que é o caso caótico. Agora vemos

que não há uma espécie de ordem como era visto nos casos regulares e o espaço de fase é todo preenchido. Esse espaço de fase foi feito para 5000 condições iniciais, gerando 5000 órbitas diferentes, e para cada órbita deixamos que ocorressem 500 colisões antes de parar a simulação. Também foi observado que quando fornecíamos apenas uma condição inicial qualquer ( $\theta_0$ ), o espaço de fase era o mesmo que o gerado com 5000 condições iniciais diferentes. Esse é um típico comportamento de sistemas caóticos ergódico, que nesse caso já era esperado.

Os três casos mostrados são extremos, ou regulares (circular e retangular) ou caótico (bilhar do estádio), que foram discutidos apenas como uma introdução ao assunto que queremos tratar.

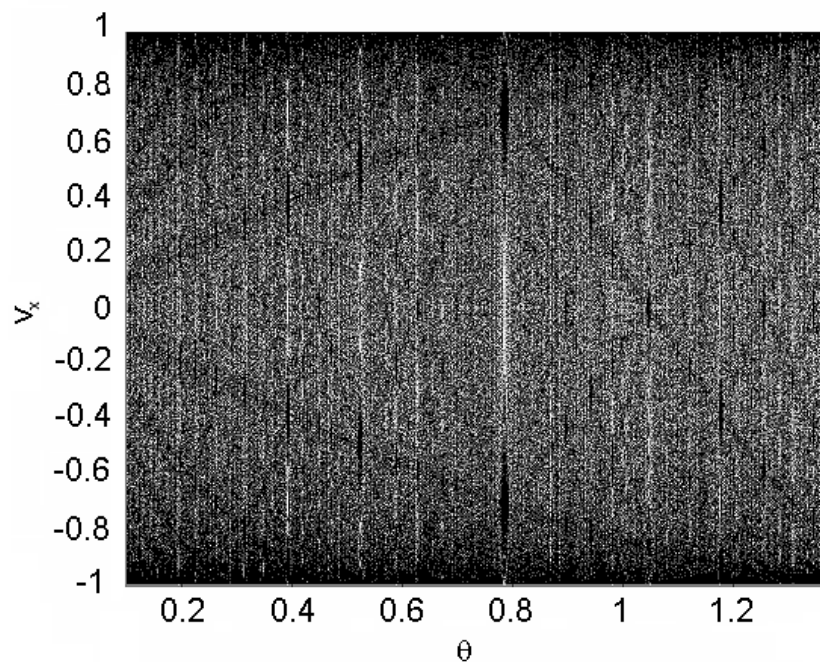


Figura 5.10: Espaço de fase para o bilhar quase circular com  $n = 0.001$ .

Agora começaremos a tratar de casos menos estudados na literatura, que são os casos intermediários. O primeiro é quando o bilhar é quase circular, ou seja, o bilhar possui um  $n$  pequeno e o valor  $L = 2R$ . A figura 5.10 mostra um espaço de fase para esse caso onde podemos notar a presença de regiões mais escuras que não aparecem nem na figura 5.7 nem na 5.9, que podem ser entendidas como regiões onde a trajetória fica por mais tempo do que no restante. Essas regiões aparecem em volta dos antigos pontos de órbitas periódicas mencionadas no caso do bilhar circular. Mostramos na figura 5.11 *zooms* de regiões mais visitadas da figura 5.10 e as órbitas correspondentes.

Podemos ver que as trajetórias mostradas não conseguem se fechar. Na verdade, nesse bilhar só teríamos uma órbita que se fecharia em cada região mostrada, mas para conseguirmos representá-la precisaríamos de uma precisão computacional muito alta. Todas as outras que estão à margem desta podem ser entendidas como órbitas quase

periódicas. Isso ocorre pela quebra de integrabilidade adicionada pela pequena parede reta que é colocada entre os semicírculos. A medida que essa parede cresce o bilhar torna-se mais próximo do bilhar do estádio. Nessa evolução as regiões mais visitadas vão se dissolvendo no mar caótico até deixarem de ser observadas. Para uma relação de  $n/2R \sim 0.4$  já não é mais possível observar as regiões mais visitadas.

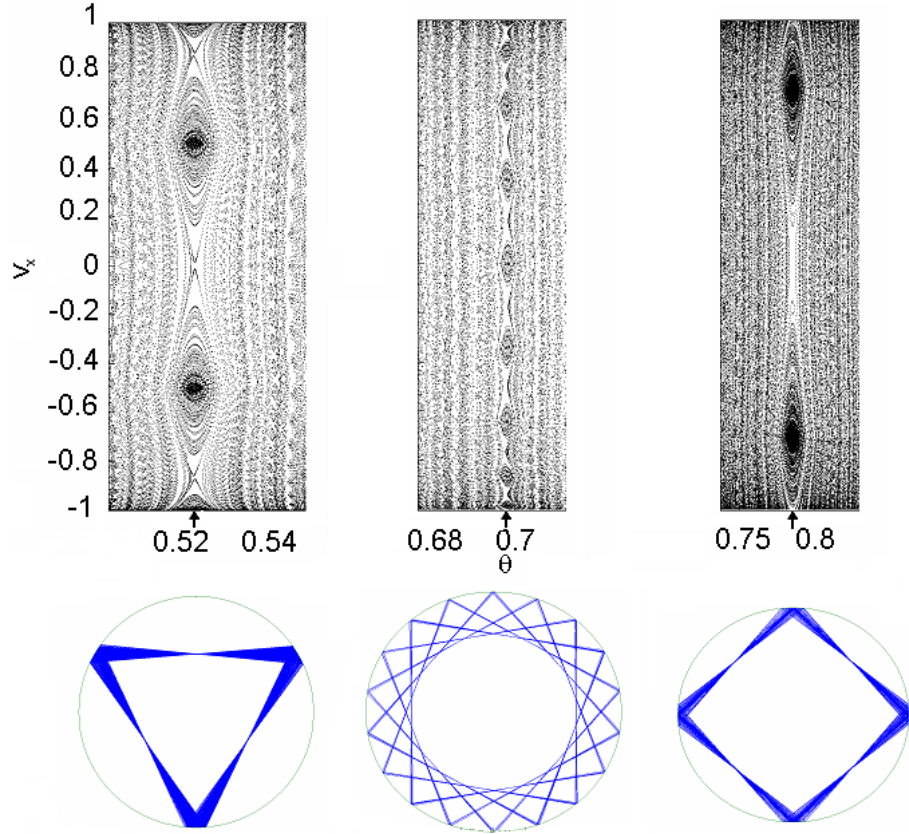


Figura 5.11: Fragmentos do espaço de fase da figura 5.10 e abaixo de cada um suas respectivas órbitas. A da esquerda tem ângulo inicial  $\theta_0 = 0.525 \text{ rad}$ , a do meio  $\theta_0 = 0.698 \text{ rad}$  e a da esquerda  $\theta_0 = 0.790 \text{ rad}$ .

### 5.2.2 Bilhar retangular com pequenos cantos arredondados

Outra região de transição interessante ocorre quando a razão  $R/L$  é pequena, entre  $10^{-5}$  e  $10^{-1}$ , ou seja, quando temos o caso de um bilhar retangular com pequenos cantos arredondados.

Usaremos agora o parâmetro de controle  $R/L$ , pois os valores de  $R$  e de  $L$  só têm importância quando analisados um em relação ao outro. Variando o valor dessa razão fizemos várias curvas para a distribuição do tempo de retorno (equação (4.2)) que é mostrada na figura 5.12.

O primeiro caso a ser observado é quando a razão  $R/L = 0.0$ , assim temos o caso

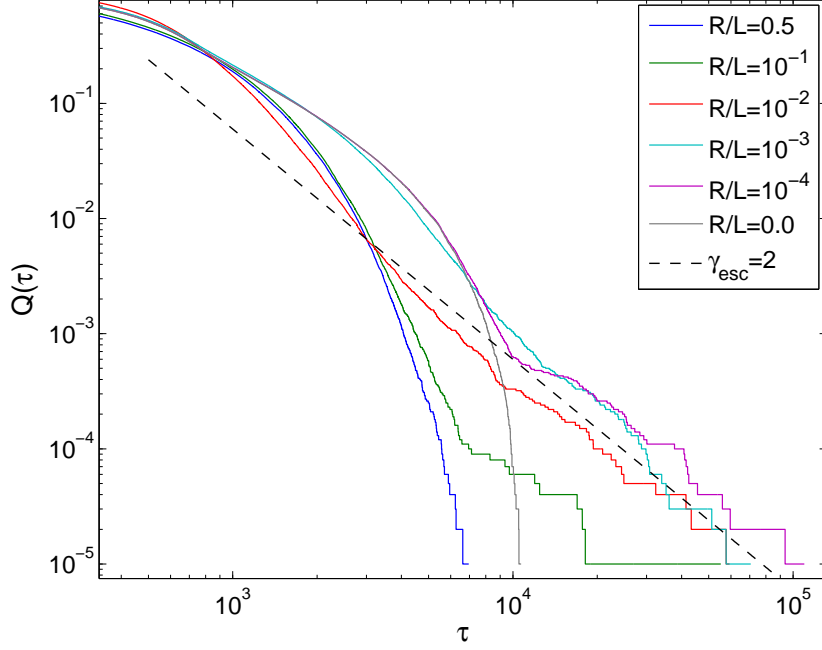


Figura 5.12: Gráfico de  $Q(\tau)$  em função de  $\tau$ . Cada curva foi feita para diferentes valores da razão  $R/L$ , desde  $R/L = 0$  (bilhar retangular) até  $R/L = 0.5$  (bilhar do estádio).

integrável do bilhar retangular sem o efeito dos cantos arredondados. Nesse caso não é visto um decaimento tipo lei de potência nem exponencial, o que era já esperado. Para essa configuração fizemos também algumas simulações com condições iniciais bem específicas com  $\theta_0 \sim \pi/2$ , que são regiões focadas nas MUPOS (descritas no capítulo 3). Para esse caso extremo encontramos tempos de retorno muito longos e uma curva tipo lei de potência com um expoente de decaimento  $\gamma \sim 1.0$ . Isso mostra que as MUPOS quando não sofrem efeito dos cantos arredondados não apresentam um expoente de decaimento  $\gamma \sim 2.0$ . Esse resultado condiz com o obtido em [2], para essas condições iniciais específicas.

Aumentando o efeito dos cantos suaves para  $R/L = 10^{-4}$ , o comportamento qualitativo de  $Q(\tau)$  começa a mudar (quando comparado com o caso de  $R/L = 0.0$ ) para tempos  $\tau \gtrsim 1.0 \times 10^4$ , ou seja, para trajetórias que permanecem mais tempo dentro do bilhar. Isto significa que um número muito baixo de trajetórias colidem com os cantos e essas colisões fazem com que a partícula demore mais para sair do bilhar, gerando o desvio de  $Q(\tau)$ . Nesse caso teríamos um expoente de decaimento  $\gamma \sim 2.0$  para aquele pequeno seguimento que se desvia depois do tempo  $\tau \gtrsim 1.0 \times 10^4$  que representa as trajetórias de tempo mais longo. Quando temos  $R/L = 1.0 \times 10^{-3}$  observamos que a curva tem um decaimento tipo lei de potência a partir de  $\tau \gtrsim 1.0 \times 10^3$ , e o expoente de decaimento é  $\gamma \sim 2.4$ . Para  $R/L = 1.0 \times 10^{-2}$  e  $\tau \gtrsim 1.0 \times 10^3$  nós obtivemos  $\gamma \sim 1.8$ . Para  $R/L = 1.0 \times 10^{-1}$  o decaimento tipo lei de potência não é mais relevante, pois

a maior parte da curva tem decaimento exponencial. Para  $R/L = 0.5$  não existe decaimento tipo lei de potência, só o comportamento exponencial é observado pois essa configuração coincide exatamente com o bilhar do estádio, que tem um comportamento completamente caótico.

A distribuição do tempo de retorno para trajetórias com tempo longo apresentaram uma característica parecida com a regiões de aprisionamento para  $R/L = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ . Em outras palavras, as trajetórias com longo tempo de retorno começam a ocorrer quando o arredondamento das bordas ainda é muito pequeno. Portanto cantos arredondados em torno de 0.01% a 1% do tamanho total do bilhar são suficientes para essa finalidade. Visualmente, tais cantos arredondados são quase insignificantes.

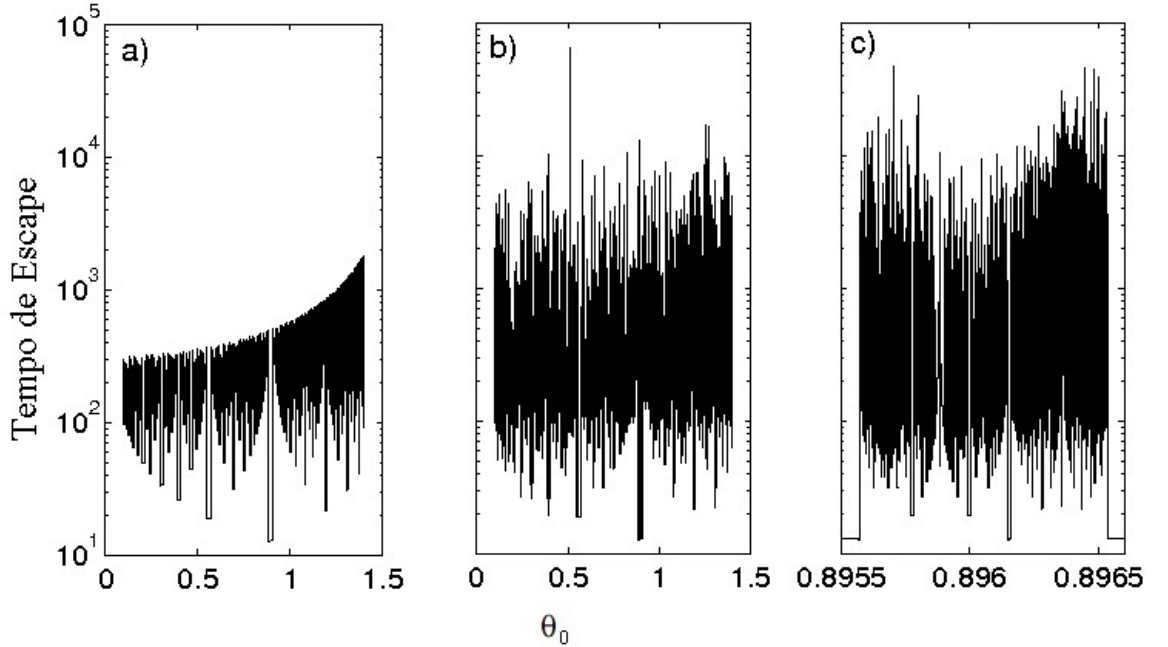


Figura 5.13: Tempo de retorno em função do ângulo de entrada  $\theta_0$  para (a)  $R/L = 0$ , (b)  $R/L = 10^{-3}$  e (c) uma ampliação de (b).

Ainda para esse bilhar verificamos, aparentemente, a existência de estruturas auto-similares fazendo um gráfico do tempo de retorno em função do ângulo de entrada  $\theta_0$ .

Um fenômeno auto-similar se comporta da mesma forma quando visto em diferentes escalas de ampliação. Uma estrutura auto-similar pode ser exata quando uma ampliação de uma parte é igual a estrutura original, ou pode ser estatística quando uma ampliação revela uma figura com os mesmos padrões da estrutura original.

A figura 5.13 mostra o tempo de retorno para três valores (a)  $R/L = 0.0$  e (b)-(c)  $R/L = 1.0 \times 10^{-3}$ . Para  $R/L = 0.0$  observamos, na figura 5.13(a), que os tempos alternam-se entre uma posição de mínimo (com valores próximos de  $\tau \gtrsim 10$ ) e máximo



(com valores  $\tau \gtrsim 10^3$ ). Para ângulos  $\theta_0 \rightarrow 1.5$  (quando a trajetória fica próxima da horizontal) o tempo de retorno aumenta, pois a velocidade na horizontal acaba sendo muito pequena.

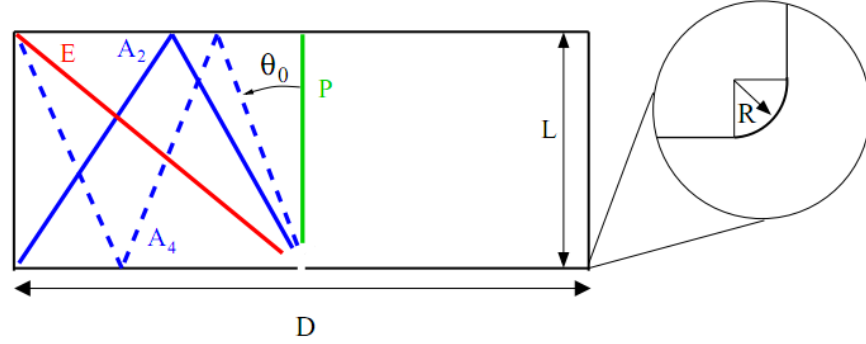


Figura 5.14: Modelo do bilhar com as trajetórias mais curtas.

A figura 5.14 mostra as trajetórias mais curtas dentro do bilhar, onde  $A_n$  se refere as trajetórias que colidem uma vez com os cantos e  $n$  vezes com as paredes horizontais. Também é mostrada a trajetória  $P$ , que sofre apenas uma colisão com a parede horizontal superior (com  $\theta_0 \sim 0.0$ ) antes de sair. O menor trajeto com colisão nos cantos é marcada pela letra  $E$ , e tem  $\theta_0 = \arctan(L/D) \sim 0.89$  o que concorda com o mínimo da figura 5.13(a). A largura dos mínimos da figura 5.13(a) está relacionada com o tamanho da abertura, que para o nosso caso é sempre de  $a = 0.4$ . Observamos que próximo ao fim das faixas de tempo mínimo aparecem tempos de escape grandes. A razão disso é que algumas trajetórias que saíam normalmente pela abertura, no caso regular sem cantos arredondados, deixaram de sair quando introduzimos o arredondamento. Essas trajetórias que deixaram de pertencer à faixa de mínimo, pulam a abertura e colidem em regiões da parede inferior muito próximas da saída e continuam seu movimento.

À medida que o arredondamento do canto aumenta para  $R/L = 10^{-3}$ , o tempo de saída aumenta significativamente, como mostra a figura 5.13(b). É possível observar trajetórias com tempo próximo a  $2 \times 10^4$ . Isso significa que o arredondamento do canto tem um forte efeito sobre o aumento do tempo de permanência das trajetórias em seu interior.

Outra constatação interessante é que mesmo para arredondamentos muito pequenos dos cantos, o gráfico dos tempos de retorno pelo ângulo inicial revelam estruturas de auto-similaridade, como pode ser visto na ampliação mostrada na figura 5.13(c), onde os tempos de escape são mostrados no pequeno intervalo de ângulo  $[0.8956, 0.8966]$ . Isto significa que se dermos condições iniciais que conduzam a pelo menos uma colisão com o canto, não importa quão pequeno seja o intervalo dos ângulos iniciais esses

arredondamentos podem induzir percursos de longa duração.

### 5.3 Segundo modelo: Bilhar retangular com arredondamento nas bordas da abertura

Começamos agora com um novo bilhar representado na figura 5.15 onde estão indicados dois tipos de arredondamentos na borda de saída: o Tipo I e o Tipo II. A razão para a escolha desses dois tipos é que na literatura é possível encontrar essas duas situações. Na verdade toda a análise foi feita levando em conta o Tipo I e extrapolamos para o Tipo II.

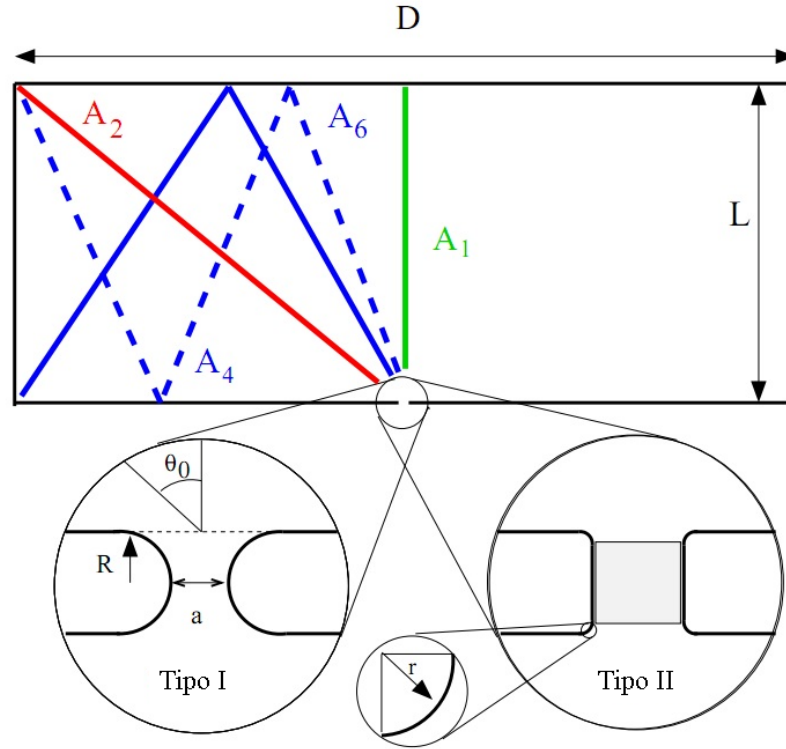


Figura 5.15: Modelo do bilhar com dois tipos de arredondamento de borda.

Começaremos fazendo a análise estatística do tempo de retorno. Em todas as simulações a partícula começa sempre no tempo  $t = 0$  e com o ângulo inicial  $\theta_0$ . Para cada condição inicial a partícula deixa a caixa com um ângulo  $\theta_f$ . Usamos no total  $10^5$  condições iniciais distribuídas no intervalo  $0.10 \lesssim \theta_0 \lesssim 1.54$ . Não temos condições iniciais para  $\theta_0$  negativo, pois a dinâmica é simétrica. Temos como limite integrável ( $R = r = 0$ ) o caso do bilhar retangular. À medida que a relação  $R/L$  aumenta as bordas começam a atuar como fonte de um comportamento dispersivo gerando

movimento caótico sem ilhas de regularidade, a não ser para aquelas órbitas que saem sem colidir com as bordas. Para grandes valores de  $R/L$  e algumas condições iniciais específicas, a dinâmica fica equivalente as dos dois casos já mencionados, bilhar de Sinai e bilhar do estádio. Também podemos ter as MUPOS que nesse caso são órbitas com direção inicial muito próxima da horizontal ou da vertical.

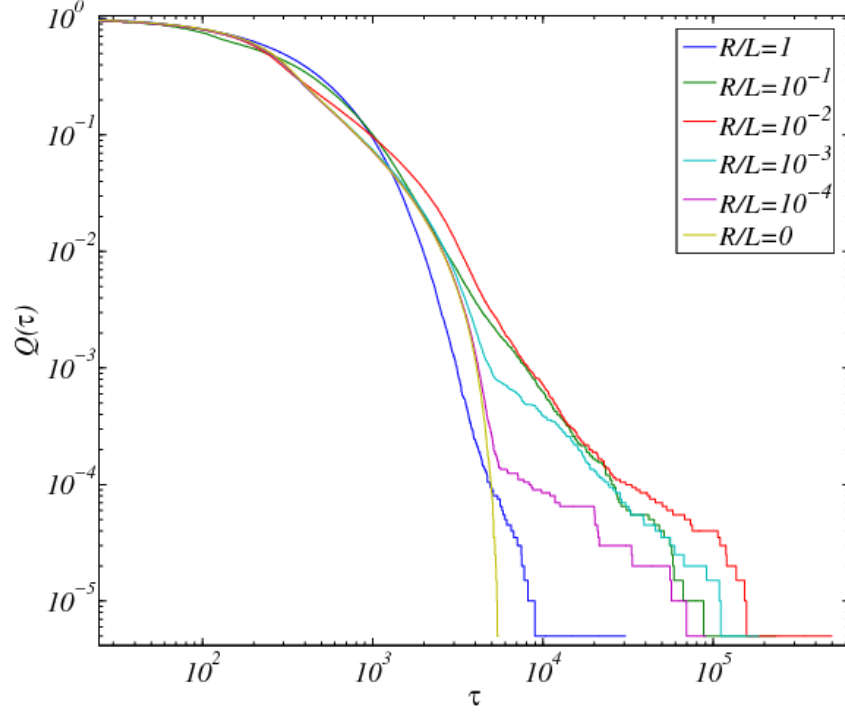


Figura 5.16: Distribuição dos tempos de retorno para o bilhar da figura 5.15 (usando a equação (4.2)). Cada curva foi feita para diferentes valores da razão  $R/L$ , desde  $R/L = 1$  (caótico) até  $R/L = 0.0$  (bilhar retangular).

Novamente começaremos a discutir, numericamente, o comportamento quantitativo de  $Q(\tau)$  para o bilhar Tipo I para diferentes valores da relação  $R/L$ , onde  $L$  é mantido fixo em todos os casos. Os resultados são mostrados na figura 5.16 para  $R/L = 0$ ,  $1/10000$ ,  $1/1000$ ,  $1/100$ ,  $1/10$  e  $1$ . Devemos notar que estes resultados são automaticamente aplicados ao bilhar Tipo II com  $r/L \sim 0$ ,  $1/200000$ ,  $1/20000$ ,  $1/2000$ ,  $1/200$  e  $1/20$  respectivamente. A única diferença é que para o bilhar Tipo II o tempo de escape  $\tau'$  está relacionado com  $\tau$  por  $\tau + t_p$ , onde  $t_p$  é o tempo necessário para a trajetória viajar entre os dois contornos paralelos a partir do furo (ver fronteira Tipo II na figura 5.15).

A primeira observação é que no caso de  $R/L = 0$ ,  $Q(\tau)$  não possui um decaimento nem tipo lei de potência e nem exponencial. Esse é o caso integrável e os tempos máximos chegam a  $\tau \sim 5.7 \times 10^2$ . Não temos tempos maiores por que não temos

condições iniciais perto de MUPOS (com  $\theta = 0, \pi/2$ ). Como já foi dito anteriormente, para o caso de condições iniciais perto das MUPOS conseguimos um decaimento tipo lei de potência com  $\gamma_{esc} \sim 1$ . Isso mostra que as MUPOS sem a dispersão causada pelas bordas e sem movimento caótico não gera expoentes de decaimento  $\gamma_{esc} \sim 2$ .

Para bordas muito pequenas, com  $R/L = 1/10000$ , o comportamento qualitativo de  $Q(\tau)$  começa a se diferenciar (quando comparado com o caso integrável de  $R/L = 0$ ), para tempos  $\tau \gtrsim 5.7 \times 10^2$  e para trajetórias que permanecem mais tempo dentro do bilhar. Isto significa que um número muito pequeno de trajetórias colidem com as bordas e continuam seu movimento dentro do bilhar aumentando o tempo de retorno e alterando o comportamento quantitativo de  $Q(\tau)$ . Para esse caso encontramos o expoente de escape  $\gamma_{esc} \sim 0.6$ . Ao aumentar a borda para  $R/L = 1/1000$  nós observamos um decaimento tipo lei de potência na figura 5.16 a partir do tempo  $\tau \gtrsim 5.5 \times 10^2$ . O expoente de escape calculado foi  $\gamma_{esc} \sim 1.3$ . Para  $R/L = 1/100$  e  $\tau \gtrsim 3.0 \times 10^3$  obtivemos  $\gamma_{esc} \sim 1.8$ . Para  $R/L = 1/10$  e  $\tau \gtrsim 1.0 \times 10^3$  obtivemos  $\gamma_{esc} \sim 2.1$ .

Podemos dizer que foram obtidos tempos de escape muito altos com características de movimento aprisionado para  $R/L = 1/1000, 1/100, 1/10$ . Em outras palavras, tempos de retorno altos já começam a ocorrer quando temos bordas muito pequenas, cerca de 0.1%. Esse tamanho de borda já é suficiente para gerar movimento aprisionado e também para modificar os valores dos ângulos de escape, como veremos melhor nas análises das próximas figuras. Visualmente tais bordas são praticamente insignificantes.

As bordas que foram introduzidas podem gerar uma dinâmica rica em comportamentos variados, isso fica evidente quando fazemos um gráfico do tempo de retorno ( $\tau$ ) pelo ângulo de entrada ( $\theta_0$ ) ou do ângulo de saída ( $\theta_f$ ) para vários valores da relação  $R/L$ . Esses gráficos estão na figura 5.17 e foram gerados criando uma malha de  $500 \times 500$  nos intervalos  $0.01 \leq \theta_0 \leq 1.0$  e  $0.00355 \leq R/L \leq 1.0$  [ $-8.0 \leq \log(R/L) \leq 0.0$ ].

Começamos a discutir a figura 5.17(a) onde cada cor representa o logaritmo do tempo de saída ( $\log(\tau)$ ). Podemos ver que listras horizontais com diferentes cores são evidentes para muitos valores de  $R/L$ . Cada faixa é definida por um conjunto de condições iniciais que possuem um tempo de retorno muito parecido e, consequentemente, têm a mesma cor. Por exemplo, para alguns ângulos iniciais específicos ( $\theta_0 \sim 0.39, 0.56, 0.69, 0.89$ ), observamos faixas azuis escuras que correspondem a tempos de retorno mais curtos. Quando  $R/L = 0$  esses ângulos podem ser obtidos analiticamente para órbitas periódicas (para o bilhar fechado), com período de  $2n$ . A equação para esses ângulos iniciais (que ficam no centro das faixas mais escuras) que dão origem as órbitas mais curtas no caso do bilhar com  $R/L = 0$  é:

$$\theta_0^{(n)} = \arctan \left[ \frac{D}{2nL} \right], n = 1, 2, 3... \quad (5.6)$$

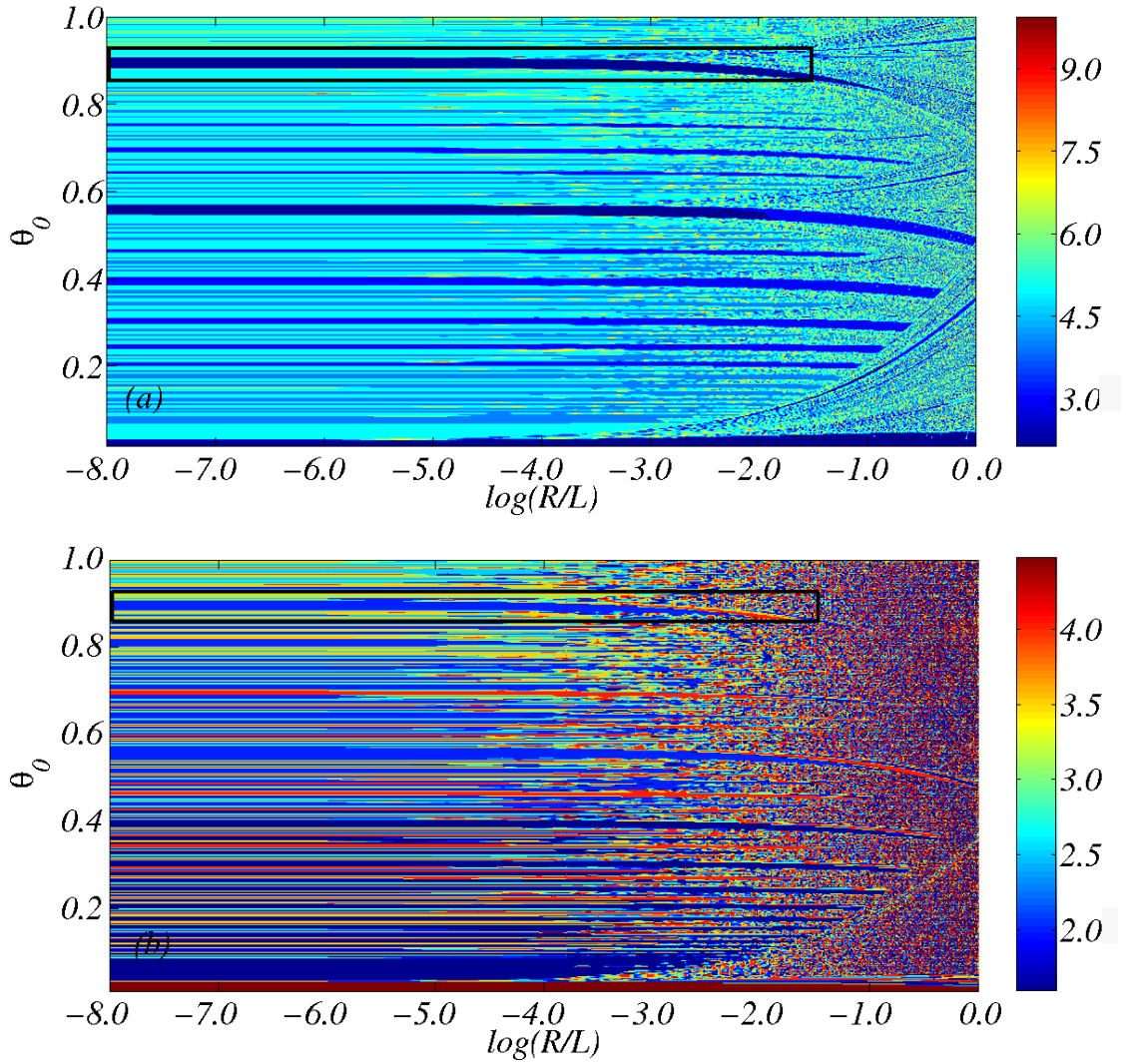


Figura 5.17: (a) Ângulo inicial pela razão  $R/L$  pelo tempo de escape (barra colorida). (b) Ângulo inicial pela razão  $R/L$  pelo ângulo final (barra colorida).

Os tempos de retorno correspondentes são:

$$t_n = nt, \quad (5.7)$$

onde  $t$  é o tempo de retorno quando  $n = 1$ . O menor tempo de retorno ( $t_0 \sim 8.0$ ) ocorre para  $\theta_0 \sim 0.0$ , quando a partícula colide uma vez contra a parede em frente à abertura de saída [ver a trajetória  $A_1$  na figura 5.15]. A largura das faixas é sempre relacionada com a abertura  $a$  do bilhar. O próximo tempo de retorno mínimo ( $t_1 = t \sim 12.8$ ) ocorre para  $n = 1$  em  $\theta^{(1)} = \arctan(5.0/4.0) \sim 0.89$  quando a partícula colide diretamente com o bordo do bilhar. Veja a trajetória  $A_2$  na figura 5.15. O terceiro menor tempo de retorno ( $\sim 2t$ ) ocorre para  $\theta^{(2)} = \arctan(5.0/4.0) \sim 0.56$  e é representado pela trajetória  $A_4$  na figura 5.15). Podemos classificar essas trajetórias  $A_{2n}$  como ponto de partida das línguas de Arnold (veremos isso adiante).

No limite de  $\theta_0 \rightarrow \pi/2$  os tempos de retorno tendem a aumentar uma vez que as trajetórias são paralelas ao ponto de fuga. Não consideramos os tempos de retorno para essas trajetórias, pois esse tempo grande é artificialmente criado devido à localização do ponto de fuga no eixo horizontal.

Com o aumento de  $n$  o tempo de retorno também aumenta para as trajetória  $A_{2n}$  fazendo com que as faixas correspondentes assumam outras cores (azul escuro  $\rightarrow$  azul claro  $\rightarrow$  verde  $\rightarrow$  amarela) [ver figura 5.15(a)] e suas larguras também diminuem. Este é o comportamento das faixas principais de tempo de retorno perto de  $R/L \sim 0.0$ .

Aumentando  $R/L$  observamos na figura 5.17(a) que as faixas de tempo de retorno mais curtos (azul escuro), tendem a sobreviver por mais tempo ao efeito de borda, enquanto as faixas de maior tempo (azul claro, verde e amarelo) tendem a ser destruídas, ou mesmo tendem a se dissolver. Como notação chamamos de “faixas principais” as faixas em azul escuro e chamamos de “faixas secundárias” as outras faixas. Portanto faixas secundárias são sempre relacionadas com valores intermediários e grandes de tempo de retorno. Línguas de Arnold [28] são visíveis na figura 5.17(a) para  $\log(R/L) \gtrsim -4.0$  e nascem ao redor das faixas principais com frequências de  $1/1$ ,  $1/2$ ,  $1/4$ ,.... Sua relação com as trajetórias da figura 5.15 é:  $A_1 \rightarrow 1/1$ ,  $A_2 \rightarrow 1/2$ ,  $A_4 \rightarrow 1/4$ ,.... Fora das faixas principais a dinâmica torna-se muito rica e complexa. Antes de explicar como isso ocorre, gostaríamos de chamar a atenção para a complexibilidade existente na dinâmica gerada pelos efeitos de arredondamento.

A figura 5.17(b) mostra  $\theta_f$  em função de  $\log(R/L)$  e de  $\theta_0$ . Cada cor está relacionada com um ângulo de emissão (ou saída)  $\theta_f$  (ver legenda colorida). Estes ângulos de emissão variam entre  $\theta_f \sim 1.4$  (quase horizontalmente para a esquerda) e  $\theta_f \sim 4.5$  (quase horizontalmente para a direita). Como na figura 5.17(a), aqui também vemos listras de cores diferentes, evidentes para um conjunto significativo de valores  $R/L$ . Cada faixa é definida por um conjunto de condições iniciais cujas trajetórias deixam o bilhar com os mesmos ângulos de saída  $\theta_f$ . Na maioria dos casos, essas faixas ocorrem para os mesmos valores de  $\theta_0$  da figura 5.17(a). No entanto, vemos que duas faixas com a mesma cor (mesmo tempo de retorno), na figura 5.17(a) não têm necessariamente a mesma cor (mesmo  $\theta_f$ ) na figura 5.17(b). Em outras palavras, trajetórias com ângulos de saída diferentes podem ter os mesmos tempos de retorno. Como  $R/L$  aumenta mais e mais, algumas faixas sobrevivem enquanto outras são destruídas ou ficam misturadas, como na figura 5.17(a). Os ângulos de emissão mostram uma dinâmica muito variada, devido ao aumento das bordas arredondadas, alternando entre todas as cores possíveis. Isto será discutido abaixo em mais detalhes.

As figuras 5.18(a) e (b) mostram, respectivamente, uma ampliação de  $\log(\tau)$  e  $\theta_f$  feita a partir das caixas mostradas na figura 5.17. A ampliação é feita em torno da trajetória  $A_2$  (ver figura 5.15) que tem um curto tempo de retorno na faixa principal. Observamos na figura 5.18(a) que abaixo da faixa principal a dinâmica do tempo de

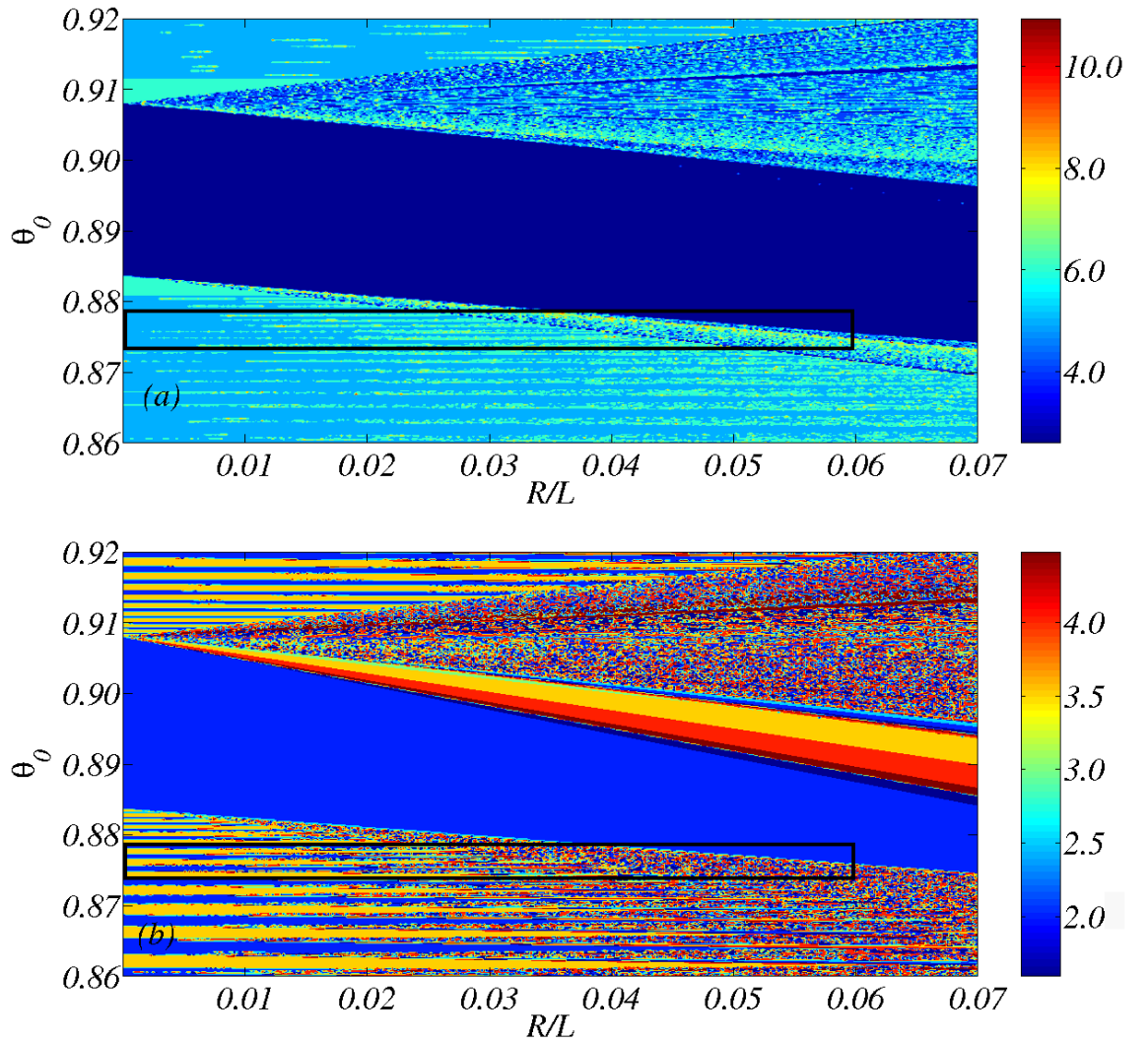


Figura 5.18: Ampliação das caixas mostradas nas figuras 5.17.

retorno sofre alterações significativas quando  $R/L$  aumenta: aparecem mais faixas secundárias de maior tempo de retorno (azul claro e amarelo) e as faixas primárias (azul escuro) com menor tempo de retorno começam a diminuir. A faixa secundária aumenta linearmente sua largura com  $R/L$ . Para o ângulo de emissão [ver figura 5.18(b)], vemos uma dinâmica muito variada surgindo no interior das faixas secundárias, alternando entre todas as possíveis cores (todos os ângulos de emissão). Além disso, abaixo da faixa principal uma sequência de faixas secundárias aparecem no fundo azul claro, como se pode observar na ampliação mostrada na figura 5.19(a). A largura de cada faixa nesta sequência aumenta com  $R/L$  lembrando faixas de um tabuleiro de gamão. Como notação, as faixas secundárias com largura maior serão designadas como "faixas de gamão". Regiões de aprisionamento e estatística com comportamento tipo lei de potência que são observadas na figura 5.16 nascem para ângulos iniciais que começam dentro das faixas de gamão. Estas são as condições iniciais que colidem, pelo menos uma vez, com a borda arredondada. O surgimento do comportamento de lei de potência torna-



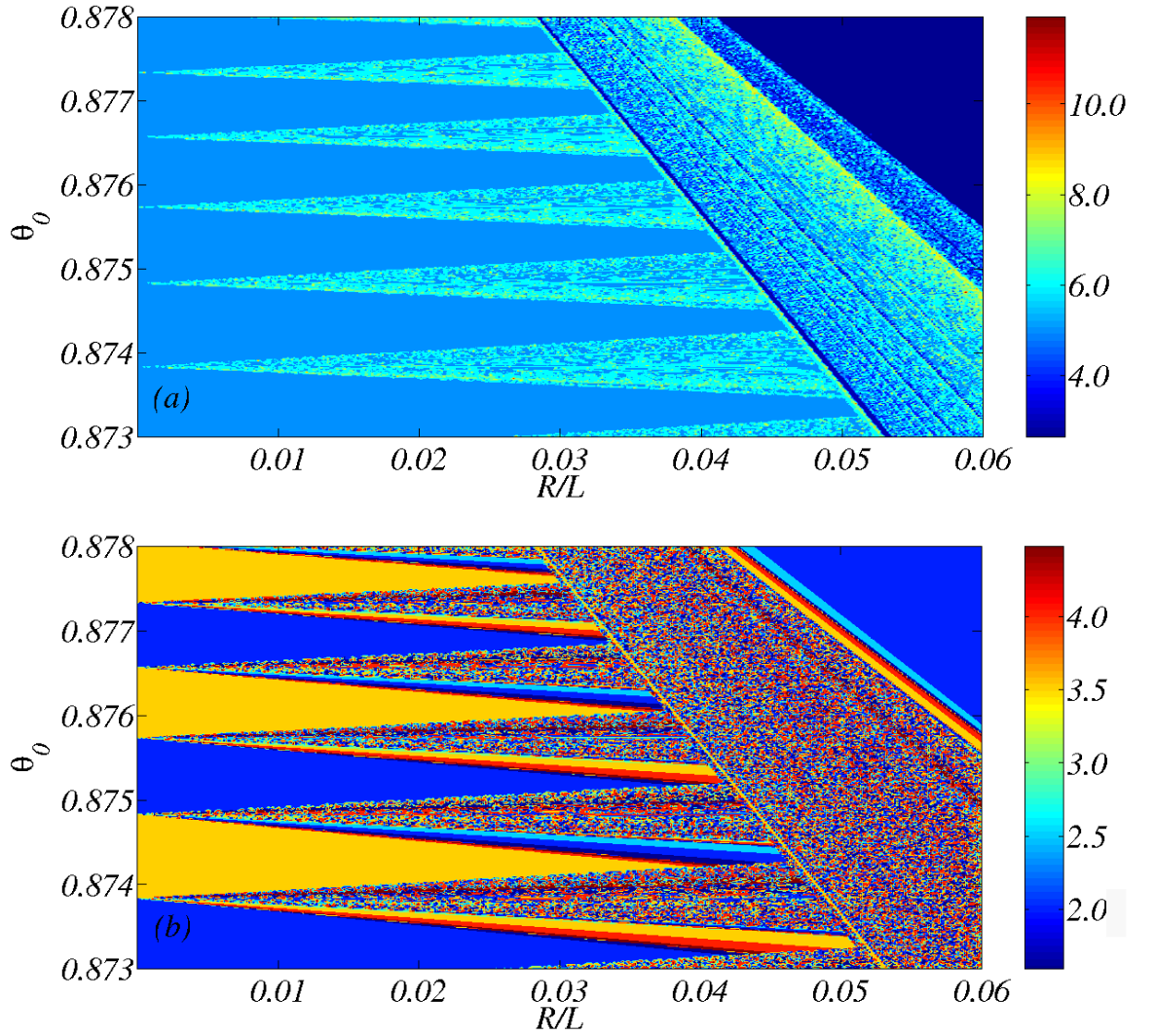


Figura 5.19: Ampliação das caixas mostradas nas figuras 5.18(a) e (b).

se mais evidente se compararmos a figura 5.19(a) com o comportamento do ângulo de emissão mostrado na figura 5.19(b). O azul claro no fundo observado da figura 5.19(a), o que corresponde a um mesmo tempo de retorno, tem duas cores (azul e laranja) na figura 5.19(b), que corresponde a dois ângulos de emissão ( $\sim 2.1$  e  $\sim 3.5$ ). Interessante é que a sequência de faixas de gamão na 5.19(a), e as correspondentes listras gamão multicoloridas da figura 5.19(b) nascem exatamente na fronteira entre os ângulos de escape em azul e laranja e  $R/L \sim 0.0$ . Dentro das faixas de gamão a quantidade de tempos de retorno permitidos aumenta muito. Isto fica evidente quando observamos o grande número de pontos amarelos e vermelhos. A dinâmica envolvida nos ângulos de emissão dentro das faixas de gamão também é impressionante, mostrando que pequenas mudanças ou erros no ângulo inicial podem mudar drasticamente o ângulo de emissão.

A observação mais importante aqui é que a dinâmica dentro das faixas gamão é consequência de trajetórias que colidem com a parte interior do semicírculo presente



na borda do ponto de escape, gerando o comportamento tipo lei de potência para  $Q(\tau)$  (ver figura 5.16). Outra observação é que a localização das faixas gamão em si não é auto-similar, no entanto, dentro das faixas gamão a estrutura auto-similar é evidente. Diversas simulações (não mostradas) foram realizadas para verificar essa afirmação. Com  $R/L$  aumentando cada vez mais, as estruturas auto-similares sofrem um aumento muito rápido, sempre em forma de listras gamão que surgem em diferentes ângulos iniciais em  $R/L \sim 0.0$  (isso foi verificado em muitos outros ângulos iniciais). Um simples cálculo geométrico determina o ângulo no intervalo  $[-\theta, \theta]$  para os quais pelo menos uma colisão com a borda arredondada ocorre, onde

$$\theta^* = \arctan \left\{ \frac{\sin \alpha}{(1 - \cos \alpha) + a/2R} \right\}, \quad (5.8)$$

e  $\alpha$  é o ângulo de colisão que a trajetória faz com a borda arredondada, definido em relação ao centro do semicírculo. O intervalo  $[-\theta, \theta]$  define as fronteiras das listras gamão. Os grandes tempos de retorno que aparecem dentro das faixas gamão começam a desaparecer quando a região é caótica e chega perto de  $R/L \sim 1.0$ .

# Capítulo 6

## Conclusões

Nesta dissertação estudamos os efeitos causados pela introdução de arredondamentos nos cantos e de bordas arredondadas na abertura de saída de um bilhar retangular.

Nosso estudo começou desenvolvendo uma maneira computacional para realizar os cálculos de quantidades necessárias para avaliar a dinâmica dos sistemas estudados. Criamos um algoritmo, escrito em linguagem C, que foi aplicado para todos os nossos casos. Com ele foi possível calcular os pontos de colisão, os ângulos de colisão, os ângulos de escape, as componentes das velocidade após cada colisão, o tempo de retorno etc.

O primeiro sistema usado foi o bilhar retangular com cantos arredondados e uma abertura. Esse arredondamento foi feito usando um setor circular do tamanho de  $1/4$  de círculo. Vimos que alterando parâmetros desse bilhar foi possível gerar casos limites como os bilhares retangular, circular e do estádio. Para cada um desses limites foram feitos espaços de fase para melhor entender os comportamentos, e assim, obter uma base para poder analisar os casos intermediários, entre o regular e o caótico.

A primeira configuração gerada foi a do bilhar quase circular, onde os valores dos parâmetros eram:  $n = 0.001$  (parede reta que une os semicírculos) e  $L = 2R$  ( $L$  é a altura do bilhar e  $R$  é o raio de arredondamento do canto). O valor de  $n$  introduziu uma perturbação que gerou órbitas quase periódicas em volta de uma órbita periódica que foram representadas através de espaços de fase.

Na sequência estudamos o mesmo bilhar, mas agora com os parâmetros sendo  $D = 10$ , e  $R/L$  variando desde 0.5 (bilhar do estádio, caso caótico) até 0.0 (bilhar retangular, caso regular). Para essa região de transição foi feito um gráfico da estatística do tempo de retorno e foi verificado que para o caso regular não há um decaimento tipo lei de potência, nem um decaimento exponencial, que já era esperado. Para o outro limite, o caso caótico, foi verificado um comportamento do tipo exponencial, o que também era esperado. Para os valores de  $R/L = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$  foi verificado que a forma da curva de  $Q(\tau)$  (estatística do tempo de retorno) começa a mudar (quando comparado com o caso de  $R/L = 0$ ). Essa mudança começa a ocorrer após um determinado tempo

$\tau$  e gera um decaimento do tipo lei de potência. Vimos que isso é devido a trajetórias que colidem com os cantos arredondados e acabam permanecendo um tempo maior dentro do bilhar.

Isso sugere fortemente que cantos arredondados em torno de 0.01% a 1% do tamanho total do bilhar, são suficientes para gerar regiões de aprisionamento, e consequentemente aumentar o tempo de retorno.

O segundo sistema foi o bilhar retangular com arredondamentos nas bordas da abertura de escape. Escolhemos esse modelo para poder relacioná-lo com experimentos reais que geralmente medem um sinal que sai do sistema de interesse. E para esses sistemas a descrição do dispositivo de abertura é muito importante. Também, em experimentos realizados próximos aos limites tecnológicos, o próprio dispositivo de abertura pode apresentar irregularidades ou defeitos provocando alterações indesejáveis e intrínsecas no sinal de saída.

Mostramos que o pequeno arredondamento das bordas pode induzir um comportamento bastante complexo e variado. A estatística do tempo de retorno para as trajetórias com tempos longos, apresentou comportamento de movimento aprisionado para bordas arredondadas entre 0.1% e 10% do tamanho total da abertura do bilhar.

Com a estatística do tempo de retorno foi possível verificar que bordas arredondadas, entre 0.1% e 10% do tamanho total da abertura do bilhar, fazem com que muitas trajetórias aumentem seu tempo de permanência dentro do bilhar, o que indica o surgimento do movimento aprisionado. Nessa região de aprisionamento o decaimento do tempo de retorno teve o expoente  $\gamma_{esc}$  aumentando com o acréscimo do valor  $R/L$ , até chegar em  $\gamma_{esc} \sim 2.0$  para  $R/L = 1/10$  ( $R$  é o raio do arredondamento da borda e  $L$  é a altura do bilhar). O ângulo inicial e o tempo de retorno mostraram uma estrutura auto-similar somente quando o ângulo inicial era dado dentro das faixas tipo gamão, que começam a surgir a partir do caso integrável  $R/L = 0$ . As trajetórias que começam dentro das faixas gamão irão colidir pelo menos uma vez com a borda arredondada, gerando o comportamento tipo lei de potência. Como  $R/L$  aumenta mais e mais, as faixas gamão começam a se sobrepor e o expoente  $\gamma \sim 2.0$  é obtido.

Para  $R/L = 1.0$  o decaimento exponencial começa a surgir para o tempo de retorno, o que corresponde ao movimento caótico. Do ponto de vista não-linear nossos resultados são impressionantes, mostrando que uma dinâmica muito rica e que regiões de aprisionamento surgem a partir de pequenos efeitos de borda ( $\sim 0.1\%$  da altura do bilhar) em bilhares integráveis. Acreditamos que tais efeitos, incluindo as línguas de Arnold, devem ser visíveis diretamente em experimentos com dispositivos de abertura, sistemas abertos com vazamentos (ver [17]) e também nos problemas relacionados às flutuações de condução em semicondutores [12, 15], o transporte de partículas em nanoestruturas e em átomos frios, e bilhares abertos em óptica [16].

Podemos dizer também que em vez de bordas arredondadas, outras formas ge-

ométricas para a modelagem da abertura podem ser usadas. Todas elas devem gerar movimento aprisionado em bilhares integráveis, afetando fortemente o sinal de saída. Nossos resultados mudam quantitativamente quando a largura da abertura sofre um aumento, no entanto, em tais casos, trajetórias com tempo longo desaparecerão e a quantidade de dados obtidos da simulação não são mais suficientes para uma boa análise estatística.

Neste trabalho nós usamos bilhares integráveis como ponto de partida. No entanto, também fizemos diversas simulações numéricas para estudar os efeitos de borda arredondada no bilhar estádio, que já é caótico mesmo quando  $R/L = 0$ . Para todos os valores de  $R/L$ , testados, descobrimos que a estatística do tempo de retorno sempre tem um decaimento exponencial, prevista para o comportamento caótico.

# Referências Bibliográficas

- [1] Y. G. Sinai, *Funct. Anal. Appl.*, v. 2, p. 61 , 1968.
- [2] L. A. Bunimovich, *Funct. Anal. Appl.*, v. 8, p. 254, 1974.
- [3] L. A. Bunimovich, *Chaos*, v. 11, n. 4, 2001.
- [4] F. Libisch, C. Stampfer, J. Burgdörfer, *Phys. Rev. B*, v. 79, n. 115423, 2009.
- [5] E. Bogomolny, M. R. Dennis, D. Dubertrand, *J. Phys. A*, v. 41, n. 335102, 2009.
- [6] M. V. Berry, M. R. Dennis, *J. Phys. A*, v. 41, n. 135203, 2008.
- [7] A. O. J. Hércules, *Partículas interagentes num bilhar com paredes suaves*, Dissertação de Mestrado, (Curitiba,2008).
- [8] C. Manchein, *Duas partículas clássicas confinadas num bilhar unidimensional e interagindo via potencial de Yukawa*, Dissertação de Mestrado, (Curitiba,2006).
- [9] J. Wiersig, *Phys. Rev. A*, v. 67, n. 023807, 2003.
- [10] C. Vaa, P. M. Koch, R. Blümel, *Phys. Rev. E*, v. 72, n. 056211, 2005.
- [11] R. Dubertrand, E. Bogomolny, N. Djellali, M. Lebental, C. Schmit, *Phys. Rev. A*, v. 77, n. 013804, 2008.
- [12] C. Marlow, R. Taylor, T. Martin, B.C.Scannell, H. Linke, M. Fairbanks, G. Hall, I. Shorubalko, L. T. Fromhold, C. Brown, et al., *Phys. Rev. B*, v. 73, n. 195318, 2006.
- [13] A. S. Sachrajda, R. Ketzmerick, C. Gould, Y. Feng, P. J. Kelly, A. Delage, Z. Wasilewski, *Phys. Rev. Lett.*, v. 80, n. 1948, 1998.
- [14] Y. Takagaki, K. H. Ploog, L. H. Lin, N. Aoki, Y. Ochiai, *Phys. Rev. B*, v. 62, n. 10255, 2000.
- [15] H. Hennig, R. Fleischmann, L. Hufnagel, T. Geisel, *Physical Review E*, v. 76, n. 015202, 2007.
- [16] A. Kaplan, N. Friedman, M. Andersen, N. Davidson *Phys. Rev. Lett.*, v. 87, n. 274101, 2001.
- [17] E. G. Altmann, T. Tamás, *Phys. Rev. E*, v. 79, n. 016204 ,2009.
- [18] C. P. Dettmann, O. Georgiou, *Physica D*, v. 238, p. 2395, 2009.

- [19] L. A. Bunimovich, C. P. Dettmann, *Europhys. Lett.*, v. 80, p. 40001, 2007.
- [20] D. N. Armstead, B. R. Hunt, E. Ott, *Physica D*, v. 193, p. 96, 2004.
- [21] G. M. Zaslavsky, *CHAOS*, v. 5, n. 693, 1995.
- [22] G. M. Zaslavsky, *Physics Reports*, v. 371, p. 461-580, 2002.
- [23] H. Alt, H. D. Gräf, H. L. Harney, R. Hofferbert, H. Rehfeld, A. Richter, P. Schardt, *Physical Review E*, v. 53, n. 3, 1996.
- [24] E. G. Altmann, E. C. da Silva, I. L. Caldas, *Chaos*, v. 14, p. 975-981, 2005.
- [25] E. G. Altmann, A. E. Motter, H. Kantz, *Chaos*, v. 15, n. 033105, 2005.
- [26] E. G. Altmann, *Intermittent Chaos in Hamiltonian Dynamical Systems*, Tese de Doutorado, (2007).
- [27] H. Goldstein, *Classical Mechanics. Massachusetts*, Addison-Wesley, (1969).
- [28] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [29] G. A. Gottwald, M. Oliver, *SIAM Review*, v. 51, p. 613, 2009.
- [30] J. L. Lebowitz, *Reviews of Modern Physics*, v. 71, p. 346, 1999.
- [31] M. Kac, *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 53, n. 1002, 1947.
- [32] M. Kac, *Interscience*, 1959.
- [33] G. M. Zaslavsky, *CHAOS*, v. 15, n. 015103, 2005.
- [34] L. G. G. de V. D. da Silva, *Órbitas Periódicas e suas Bifurcações em Bilhares Magnéticos*, Dissertação de Mestrado, (São Paulo, 1997).